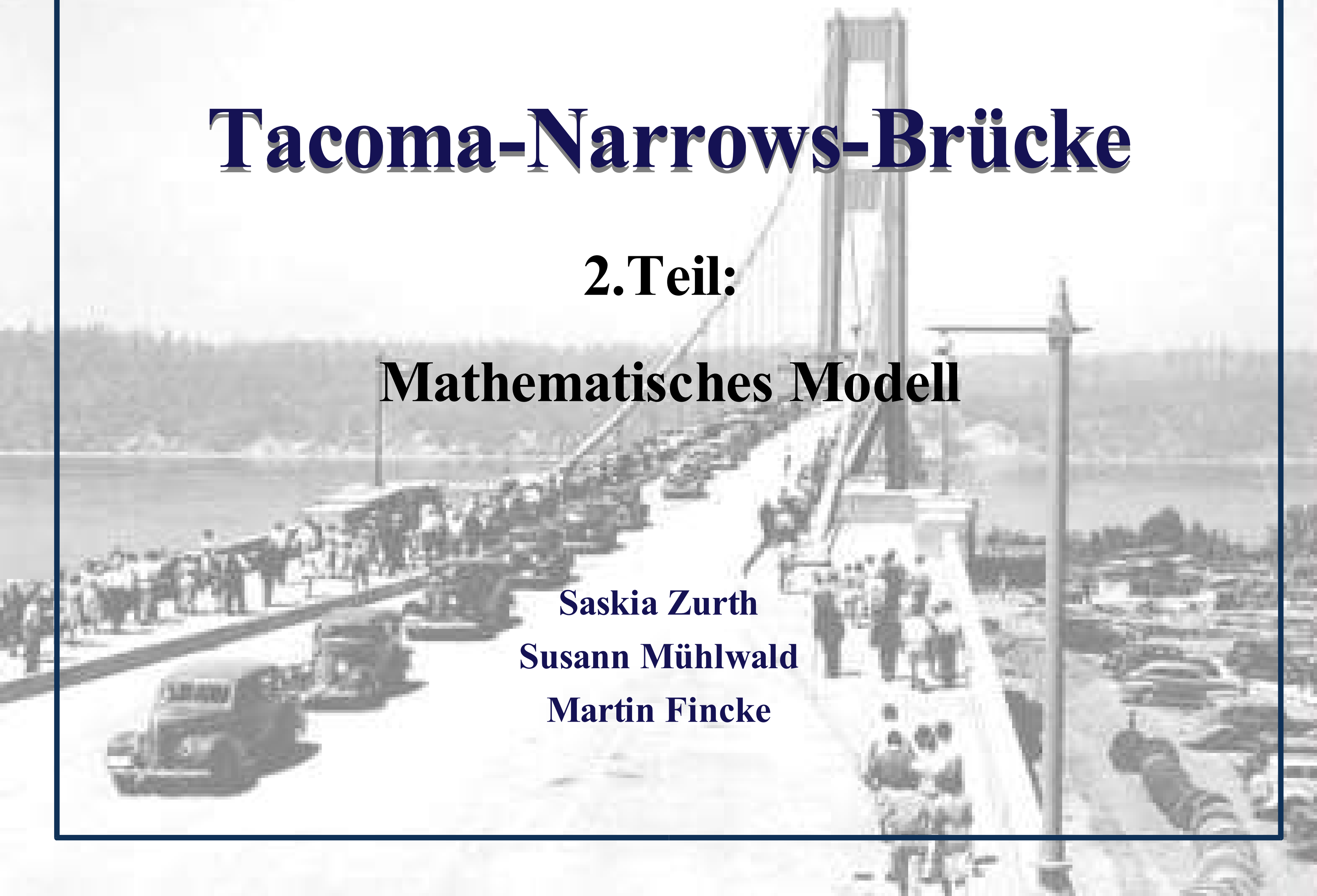


Tacoma-Narrows-Brücke

2.Teil:

Mathematisches Modell

Saskia Zurth

Susann Mühlwald

Martin Fincke

Ablauf

- 1. Rückblick
- 2. Mathematisches Modell
  - 2.1 Annahmen
  - 2.2 Energiegleichungen
    - 2.2.1 Kinetische Energie
    - 2.2.2 Potentielle Energie
    - 2.2.3 Lagrange + Eulergleichungen
  - 2.3 DGL + Parameter
- 3. Weiteres Modell

Rückblick

- Bei mäßigem Wind starke vertikale Oszillation (Amplitude von bis zu 5 ft)
- Rapider Übergang in torsionale Schwingung
- Kurz danach der Crash

Annahmen

- **Betrachtung des Querschnitts der Brücke**
- **Tragseile modelliert als Federn**
- **Kein Spannungsverlust der Federn**

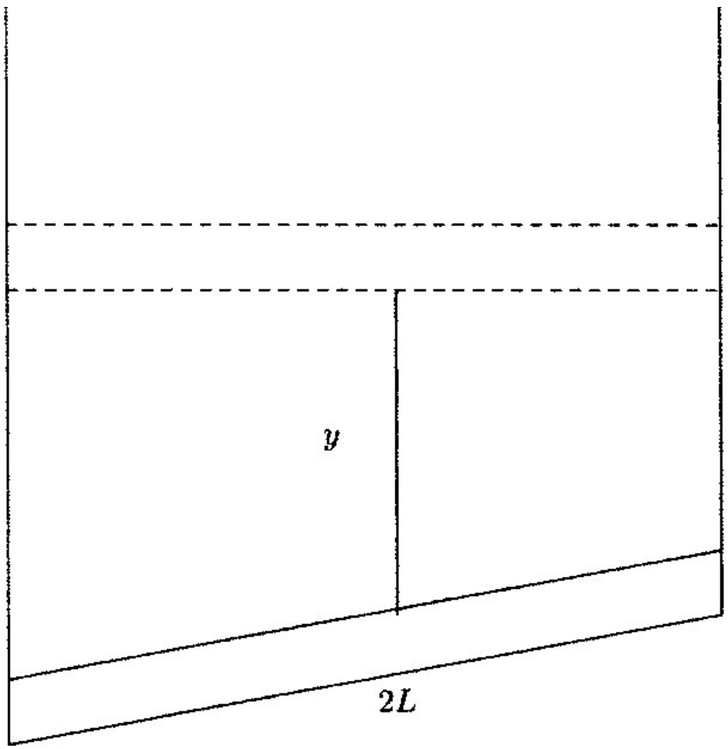


Figure 1: Cross section of the bridge.

Kinetische Energie

Allgemein: $KE = \frac{1}{2}mv^2$

Vertikale Bewegung: $KE = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$

Torsionale Bewegung: $KE = \frac{1}{2}dm(\dot{\theta}r)^2$

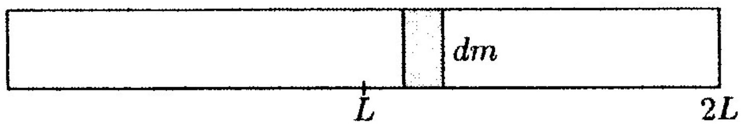
Transformation: $KE = \frac{1}{2}\lambda dr(\dot{\theta}r)^2$

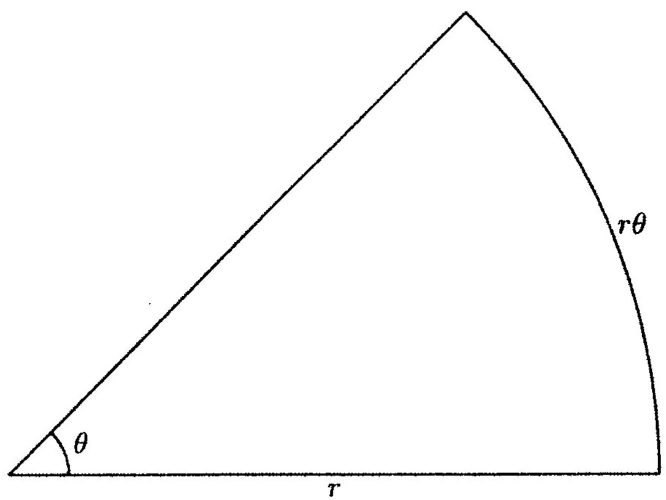
Kinetische Energie (T)

$\lambda = m/2L$ **(Masse pro Längeneinheit)**

$dm = \lambda\, dr$

$\dot{\theta}$ **(Winkelgeschwindigkeit)**





- **KE über gesamten Intervall:**

$$KE = \frac{1}{2}\lambda\dot{\theta}^2 \int_{-L}^{L} r^2 dr$$

$$= \frac{1}{3}\lambda\dot{\theta}^2 L^3$$

$$\overset{\lambda \text{ ersetzen}}{=} \frac{1}{6} m\dot{\theta}^2 L^2$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{6}mL^2\dot{\theta}^2}$$

Potenzielle Energie (V)

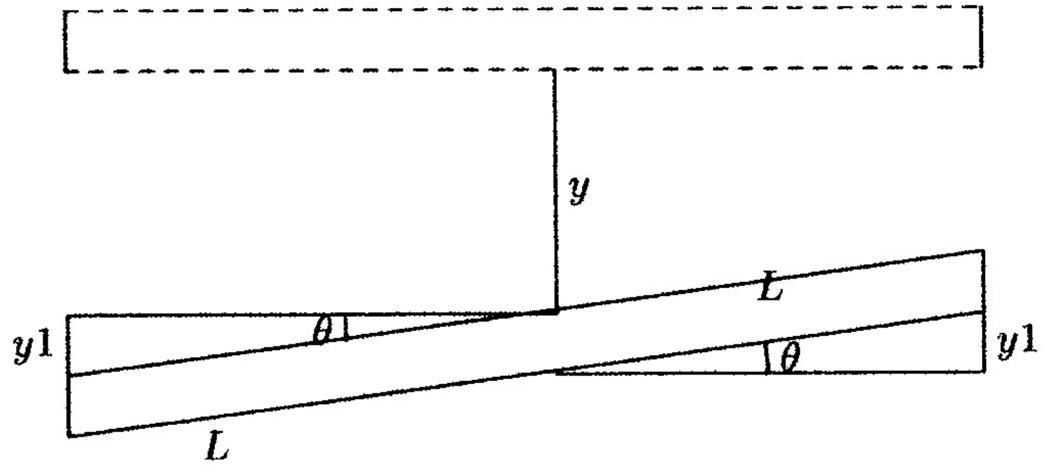


Figure 4: Total displacement.

bzgl. Gravitation: $PE_g = mgy$

bzgl. Kippbewegung: $PE_K = \frac{k}{2}[((y - L\sin\theta)^2)^+ + ((y + L\sin\theta)^2)^+]$

$$\boxed{\mathbf{V} = PE_K - PE_g}$$

Lagrange + Eulergl.

- **Lagrange:** $\mathcal{L} = T - V$

(Bewegungsgleichungen aus der Mechanik lassen sich sich einfach mit dem Lagrangeformalismus lösen)

Diese erfüllt Nebenbedingung:

1. $\frac{d}{dt}\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\theta}} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \theta}$ ***(Gl. für Rotation)***

2. $\frac{d}{dt}\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{y}} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta y}$ ***(Gl. für Vertikale Oszillation)***

Eulergleichungen

zu 1): $\frac{\delta L}{\delta \theta} = \frac{1}{2}k[2(y - L\sin\theta)^+(-L\cos\theta) + 2(y + L\sin\theta)^+(L\cos\theta)]$ ***(rechte Seite)***

$= kL\cos\theta[(y - L\sin\theta)^+ - (y + L\sin\theta)^+]$

$\frac{d}{dt}\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\theta}} = \frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta}$ ***(linke Seite)***

~> einsetzen in 1. Gl.

zu 2): $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta y} = -\frac{1}{2}k[2(y - L\sin\theta)^+ + 2(y + L\sin\theta)^+] + mg$ ***(rechte Seite)***

$= -k[(y - L\sin\theta)^+ + (y + L\sin\theta)^+] + mg$

$\frac{d}{dt}\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{y}} = \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = m\ddot{y}.$ ***(linke Seite)***

~> einsetzen in 2. Gl.

DGL

- **Eulerformeln**

  - Dämpfungstherme $\delta\dot{y}$ $\delta\dot{\theta}$

  $f(t)$

1. $\ddot{\theta} = \frac{3k}{mL}\cos\theta[(y - L\sin\theta)^{+} - (y + L\sin\theta)^{+}] - \delta\dot{\theta} + f(t)$

2. $\ddot{y} = \frac{k}{m}[(y - Lsin\theta)^{+} + (y + L\sin\theta)^{+}] + g - \delta\dot{y}$

Vereinfacht:

1. $\ddot{\theta} = \frac{6k}{m}\cos\theta(\sin\theta) - \delta\dot{\theta} + f(t)$

2. $\ddot{y} = \frac{2k}{m}(y) + g - \delta\dot{y}$

DGL

- **Linearisierung:** (Ann. kleiner Winkel)

$$\sin\theta = \theta$$

$$\cos\theta = 1$$

~> Nichtlinearität der 1. Eulergleichung verschwindet

Achtung: Bei großer Oszillation gilt diese Linearisierung nicht mehr!!

Parameter

- **Hookesches Gesetz :** (für Federn)

$$\boxed{2ky = mg}$$

$$y = 0{,}5\,m \qquad \& \qquad m = 100\ kg$$

~> 2 k(0,5) = (100) *9.8

~> $\boxed{\mathbf{k = 1000}}$

Weiteres Modell

- **Resonanzmodell:** (Kármánsche Wirbelstraße)
- **Bedeutung:** Frequenz der äußeren Einwirkung nähert sich der Eigenfrequenz der Brücke an => Aufschaukelung

- **DGL:** Harmonische Schwingung (1Freiheitsgrad)

=> $$\boxed{m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = \alpha \cos \omega t}$$

- **PROBLEM:**
  - Große vertikale Amplitude kann beschrieben werden, aber nicht die Torsionale.
  - Schwer realistische Initialwerte zu bestimmen.


The End