Dynamik eines Verkehrsflusses Teil II

Mathematische Modelle zur Beschreibung von Verkehrsflüssen

Mikail Aygar

Seminar WS 07/08

Rückblick!

Beschreibung verschiedener mathematischer Modelle

- **mikroskopischen Modell** (jedes Auto einzeln betrachtet)

- **mesoskopische Modell oder kinetische Modell** (statistische Verteilung)

- **makroskopische Modell** (Verkehrsfluss durch Erhaltungssätze)

Wozu diese Modelle?

- Verschiedene Aspekte in unterschiedlichen Zusammenhängen
- Untersuchung des Verkehrsflusses in Einbahnstraßen
- Entstehung von Staus, Auffahrunfällen und Ampeleffekten

=> Optimierung dieser Probleme durch Erhaltungsgleichungen

Das Makroskopische Modell

Dieses Modell löst sich ganz von der Modellierung der Fahrzeuge und stellt anstatt dieser Dichte, Durchschnittsgeschwindigkeit und Geschwindigkeitsvarianz in den Mittelpunkt, deren zeitliche Äderung über Erhaltungssätze beschrieben werden.

Das Modell von Lighthill, Whitham und Richards

- Ältestes Modell von Lighthill und Whitham
- Parallel Modell von Richards entwickelt
- Modell beruht auf dem Umstand, dass außerhalb von Zu- oder Abfahrten keine Fahrzeuge hinzukommen oder verloren gehen (wenn man von Unfällen absieht).
- Diese Erhaltung der Fahrzeugzahl führt auf die Kontinuitätsgleichung

Verkehrsdichte und –fluß in Gleichgewichtzuständen I

Wir betrachten das Gleichgewicht aller Fahrzeuge mit gleicher Geschwindigkeit und im gleichen Abstand. Die **Verkehrsdichte** ist dabei definiert als die Anzahl der Fahrzeuge in einem Intervall geteilt durch die Länge des Intervalls.

$$p = p(x,t) = \frac{\#\ \text{Fahrzeuge in Umgebung von } x}{\text{Größe der Umgebung}}$$

Verkehrsdichte und –fluß in Gleichgewichtzuständen II

Der **(Durch)Fluß (Verkehrsfluss)** ist wie folgt definiert

v(x,t)=Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t

p(x,t)v(x,t)=Anzahl der Autos, die den Punkt x zum Zeitpunkt t passieren

Insbesondere

p(x1,t)v(x1,t): # der in (x1, x2) einfahrenden Autos / Zeiteinheit
p(x2,t)v(x2,t): # der in (x1, x2) ausfahrenden Autos / Zeiteinheit

Verkehrsdichte und –fluß in Gleichgewichtzuständen III

Da die Straße einspurig ist, folgt: es verschwinden keine Auto

- ➔ Es gilt folgender „Autoanzahlerhaltungsgesetz“:

Verbal: in jedem Abschnitt (x1,x2) der einspurigen Straße muss die zeitliche Änderungsrate der Dichte gleich sein, der Differenz der einfahrenden und ausfahrenden Autos.

Mathematisch:

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)dx = \rho(x_1,t)v(x_1,t) - \rho(x_2,t)v(x_2,t)$$

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} \partial_t\rho(x,t)dxdt &= \int_{t_1}^{t_2}(\rho(x_1,t)v(x_1,t) - \rho(x_2,t)v(x_2,t))dxdt \\ &= -\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} \partial_x(\rho(x,t)v(x,t))dxdt\end{aligned}$$

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

Dynamik eines Verkehrsflusses Teil II

Optimale Durchflussfunktion für den Verkehr finden

→bekommen hyperb. Erhaltungsgl.

Dieser Gestalt

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

Definition: hyperbolische Erhaltungsgleichung

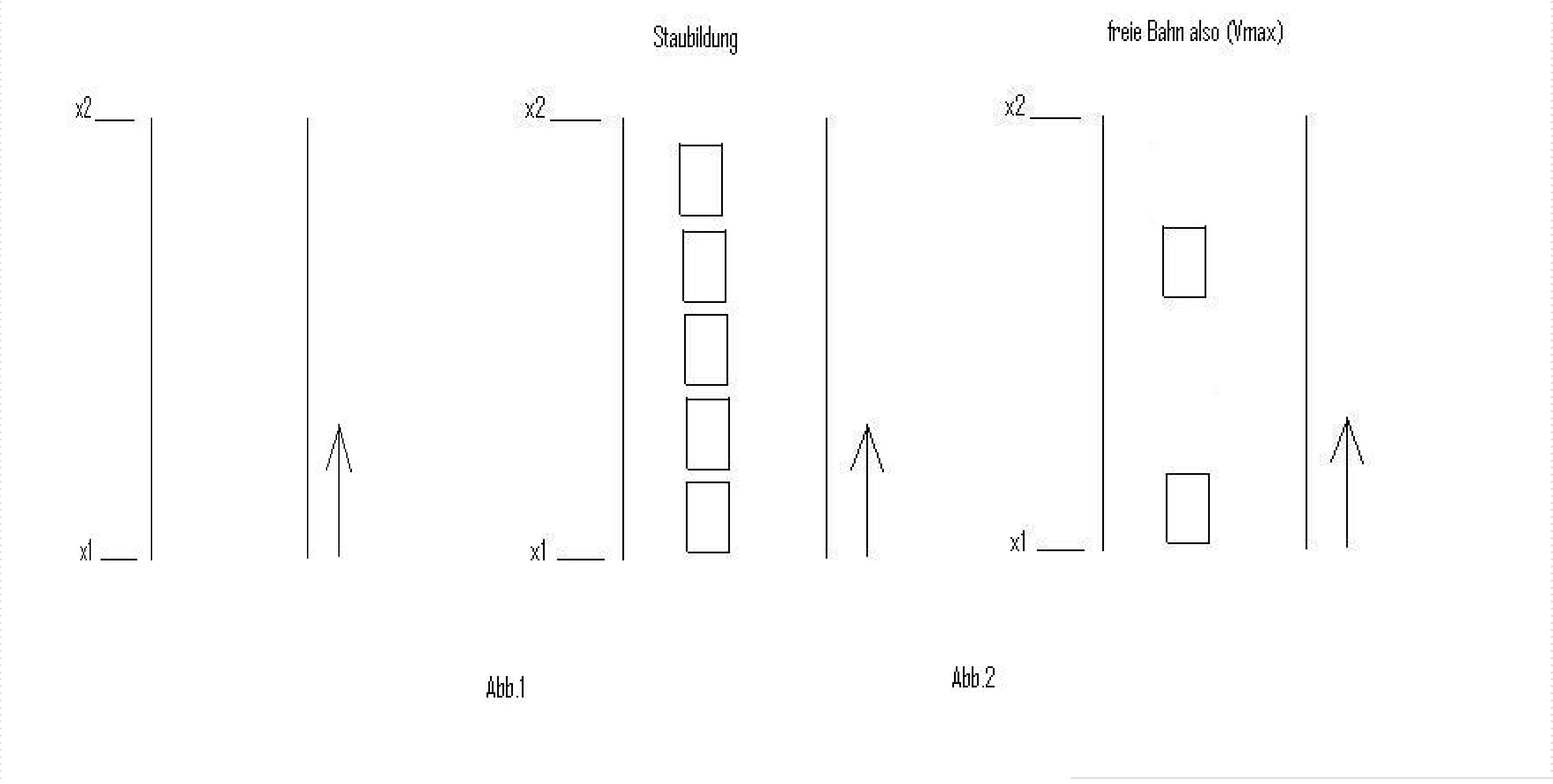
Allgemein heißt das System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

$$u_t + Bu_x = q(t, x, u) \quad (1.12)$$

$$u : (R \times R^+ \to R^m), q : (R \times R^+ \times R^m \to R^m)$$

hyperbolisch, wenn die Matrix $B \in R^{m \times m}$ reell diagonalisierbar ist. Gilt zudem $q = 0$, so repräsentiert (1.12) eine Erhaltungsgleichung. Für $q \neq 0$ spricht man von einer Erhaltungsgleichung mit Quellterm (Dämpfung).

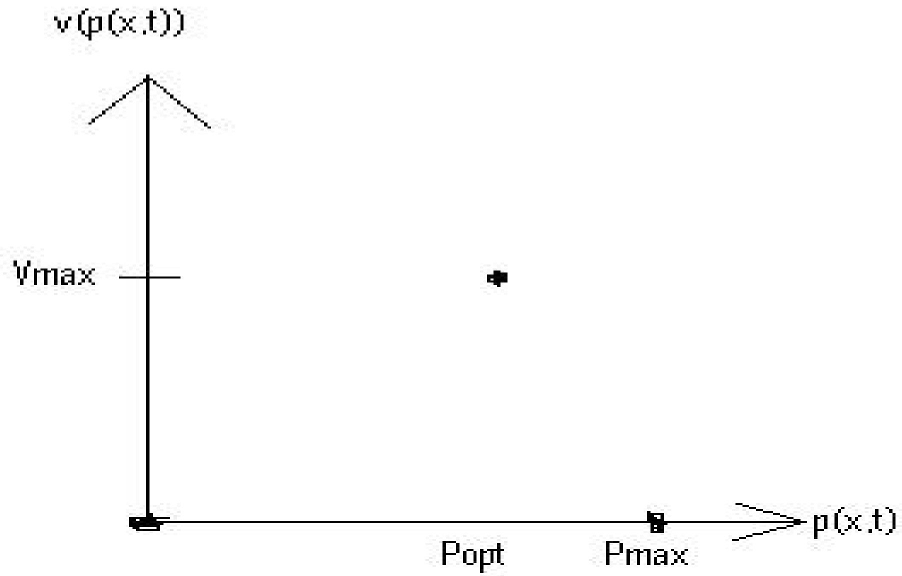
Straßenlagen!



Optimalen Durchfluss finden

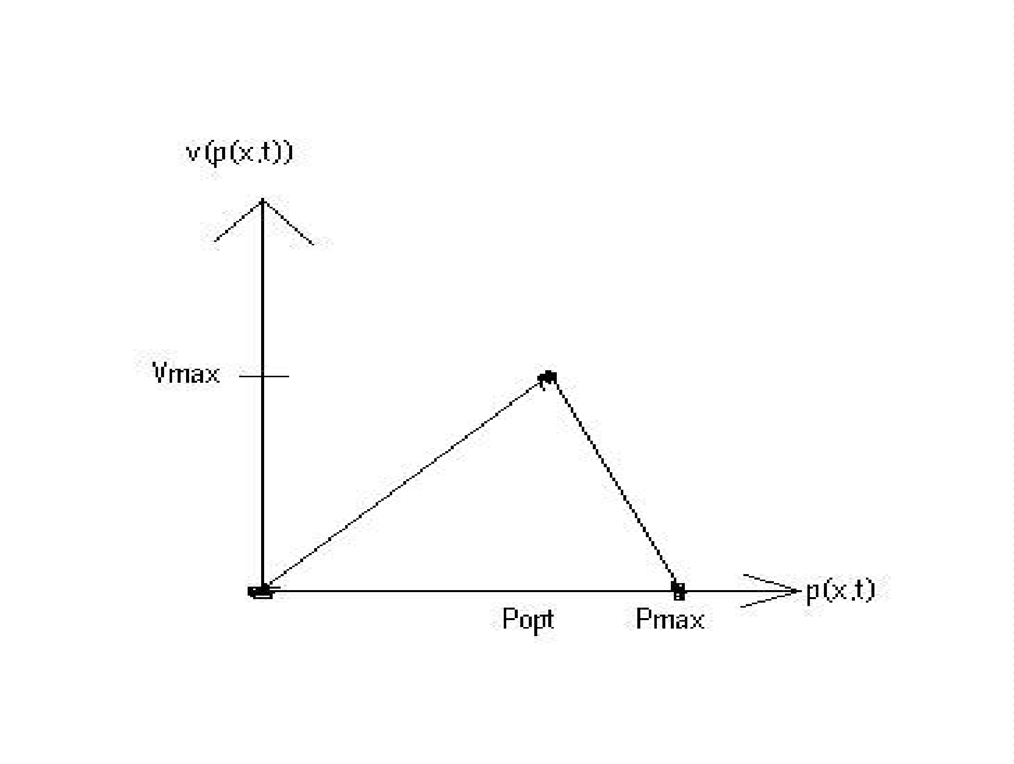
- Annahme: Geschwindigkeit ist eine Fkt der Verkehrsdichte
- $v=v(p)=v(p(x,t))$
- 1.Wenn $p(x,t)=max \rightarrow v(p)=0$ (Bild 1)
- (Autos Stoßstange an Stoßstange)
- 2.Suchen p opt → v(p) max (Bild 2)

D.h. in einem Diagramm können wir folgende 3Punkte festlegen: (0,0), (Popt,Vmax) und (Pmax,0)



d.h. wiederum, dass wir eine Zustands-gleichung finden, das diese 3 punkte verbindet. Setze dazu v=v(p(x,t))

1. Fall Lineare Zustandsfkt.



machen wir für die Geschwindigkeit den einfachen Ansatz

$$v(\rho) = v_{max}(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}})$$

Die Zugehörige Flussfunktion resultiert damit zu

$$f(\rho) = \rho v_{max}(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}})$$

Somit erhalten wir folgende Gleichung

$$\rho_t + [\rho v_{max}(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}})]_x = 0$$

Für die geschwindigkeit der Steigung der Charakteristik folgt

$$f'(\rho) = v_{max}(1 - 2\frac{\rho}{\rho_{max}})$$

$$Wegen\ f''(\rho) = -2\frac{v_{max}}{\rho_{max}} < 0\ ist\ die\ Flussfunktion\ konkav$$

Die Trajektorien x(t) der einzelnen Fahrzeuge, d.h. die Wegbahnen mit der Zeit, ergeben sich aus der Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = v(\rho(x,t)) \quad bzw.\ x(t) = x_0 + \int_t^{t_0} v(\rho(\sigma),\sigma))d\sigma$$

mit Startwerten t_0, x_0. Ist eine Lösung ρ von (3.34) bestimmt, so können die Trajektorien berechnet werden. Man beachte, dass die Lösung ρ unstetig sein kann, die Wegbahnen jedoch stetig sind.

Wir betrachten das Riemann Problem

$$\rho(x,0) = \begin{cases} \rho_l, & x < 0 \\ \rho_r, & x > 0 \end{cases} \quad \text{mit } 0 \leq \rho_l, \rho_r \leq \rho_{\max}.$$

Nach der Rankine-Hugeniot Sprungbedingung (3.23) muss eine Unstetigkeit die Schockgeschwindigkeit

$$s = \frac{f(\rho_l) - f(\rho_r)}{\rho_l - \rho_r} = u_{\max}\left(1 - \frac{\rho_l + \rho_r}{\rho_{\max}}\right) \tag{3.40}$$

besitzen. Die Entropiebedingung (3.24) verlangt $f'(\rho_l) > f'(\rho_r)$, wodurch wegen $f'' < 0$ dann $\rho_l < \rho_r$ gelten muss, damit eine Schockwelle hier physikalisch sinnvoll ist.

Beispiel eines nicht linearen falles des Verkehrsflusses

hier wird die bisherige Theorie als physikalische Interpretation dargestellt

1.Fallbeispiel: $\rho_r = \rho_{max}, \; \rho_l < \rho_{max}$

Hier liegt auf der rechten Seite ein Stau vor.

Wegen $\rho_l < \rho_{max}$ ist hier eine Schockwelle eine schwache Lösung, welche die Entropiebedingung erfüllt, d.h. physikalisch sinnvoll.

Die Schockgeschwindigkeit ist negativ. Fahrer auf der linken

Seite, die auf den Stau zukommen, müssen sofort ihre Geschwindigkeit auf null verringern.

In der Realität dauert das Abbremsen eine kurze Zeit. Dieser Effekt

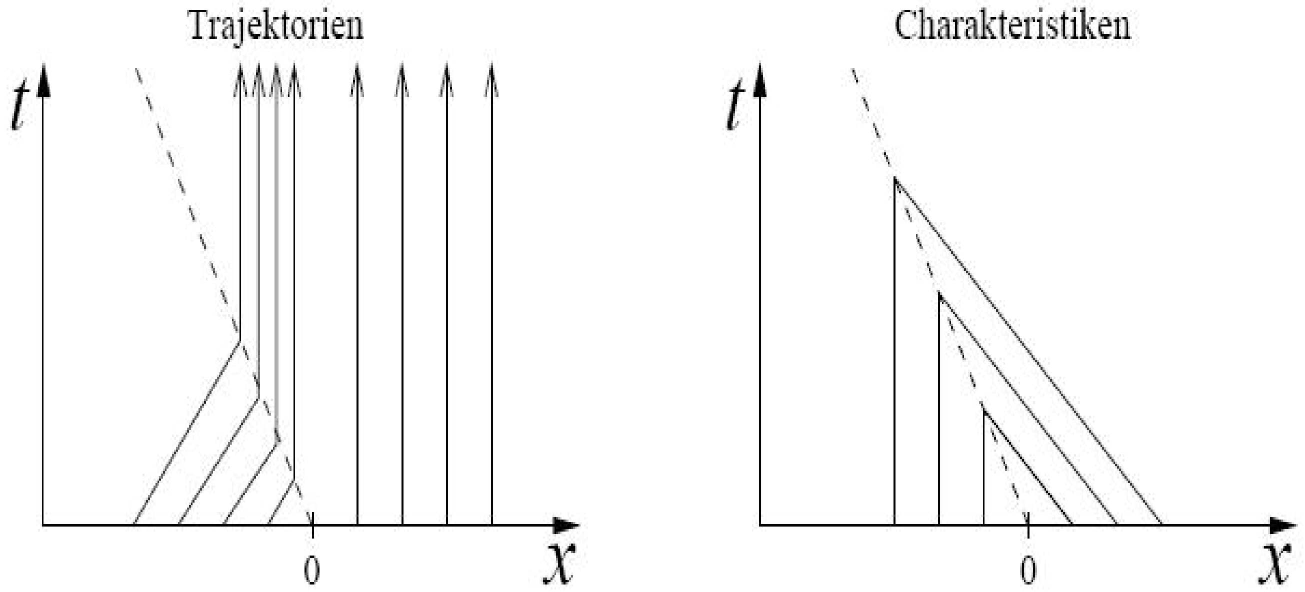
ist im Modell hier nicht vorhanden, was einer mathematischen Idealisierung entspricht.

Die Schockwelle, die die Ausbreitung des Staus beschreibt, ist jedoch

stabil. Die genaue Struktur, wie die Fahrzeuge die Schockwelle erreichen, stellt hier nur einen kleinen Teil der Lösung dar und ist daher uninteressant.

1.Fallbeispiel:

Die folgende Abbildung zeigt die Trajektorien der Fahrzeuge und die Charakteristiken im Spezialfall $\rho_l = \frac{1}{2}\rho_{\max}$.

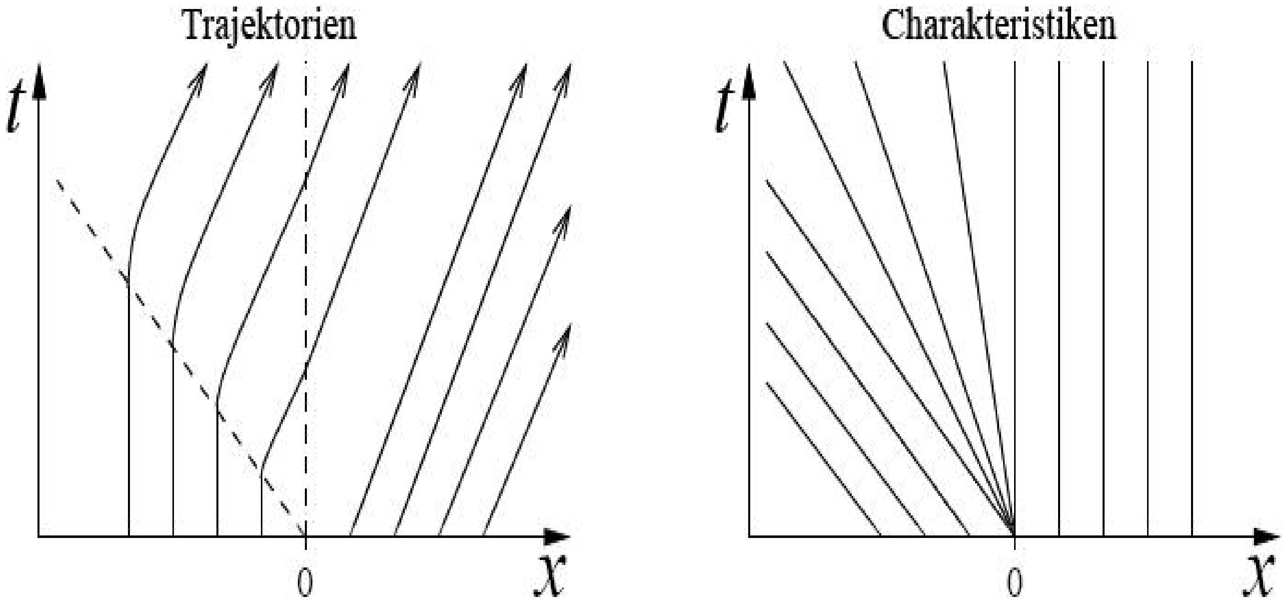


2.Fallbeispiel: $\rho_l = \rho_{\max},\ \rho_r < \rho_{\max}$

- Diese Situation beschreibt die Auflösung eines Staus. Auf der linken Seite der Straße stauen sich die Autos bei $t = 0$, während auf der rechten Seite noch Freiraum ist.
- Nach der obigen Entropiebedingung ist hier ein Verdünnungsschock nicht sinnvoll.
- Die Autos beschleunigen nicht sofort von Geschwindigkeit null auf den nun möglichen Wert.
- Erst wenn Autos vor einem Fahrer sich langsam in Bewegung setzen, fährt dieser selbst los. Die Phase der Beschleunigung stellt einen wesentlichen Teil der Lösung dar und kann deshalb nicht vernachlässigt werden.
- Die korrekte schwache Lösung ist daher eine Verdünnungswelle.

2.Fallbeispiel

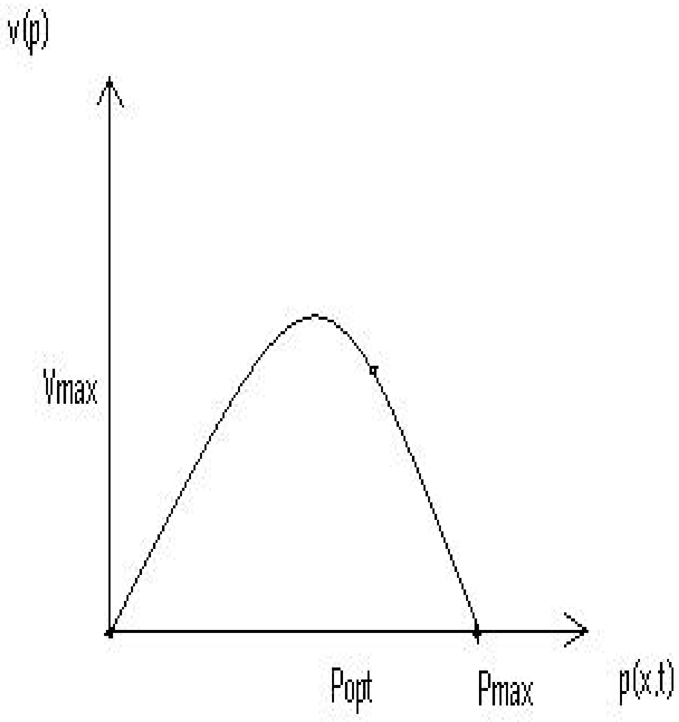
Die Abbildung zeigt wieder die Trajektorien der Fahrzeuge und die Charakteristiken, nun im Spezialfall $\rho_r = \frac{1}{2}\rho_{\max}$.



Fazit

- Die beiden Fallbeispiele zeigen, dass die Geschwindigkeit der Fahrzeuge nicht mit der Geschwindigkeit des Informationstransports über die Charakteristiken identisch ist.
- Analog gilt dies in der Gasdynamik für die Geschwindigkeit der Moleküle.
- Die Charakteristiken beschreiben den Transport einer Dichteverteilung.
- Das einzelne Teilchen kann dabei durch die Dichteverteilung laufen und transportiert selbst keine Information.

2. Fall: Quadratische Zustandsgleichung



$$v = v(\rho) = \frac{v_{max}}{\rho_{opt}(\rho_{max} - \rho_{opt})}\rho(\rho_{max} - \rho)$$

$$v' \approx (\cdot)\rho$$

$$\rho_t + (\cdot)\rho\rho_x = 0$$

$\Longrightarrow$ nichtlineare Erhaltungsgleichung