

Projektblatt *Advektionsgleichung*
zur Vorlesung
“Theorie und Numerik hyperbolischer Erhaltungsgleichungen”

Lineare Advektionsgleichung $\mathbf{u}_t + \mathbf{a}\mathbf{u}_x = 0$

- allgemeine Lösung: $\rho(x, t) = \rho_0(x - at)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$
 ρ_0 evtl. unstetig (singulär)
- Lösung konstant entlang der *Charakteristik* $x - at = \text{konst.}$
 $t = \frac{x-c}{a}$, $c = x_0$ Transport der Information entlang der Charakteristiken

Charakteristik erfüllt
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad x(t) = at + x_0$$

Lösung ρ entlang der Charakteristik $(x(t), t)$

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t), t) = \rho_x \underbrace{\dot{x}(t)}_{=a} + \rho_t = 0 \Rightarrow \rho = \text{konst.}$$

Advektionsgleichung mit variablen Koeffizienten $\mathbf{u}_t + (\mathbf{a}(\mathbf{x})\mathbf{u})_x = 0$

- Lösung ρ entlang der Charakteristik $(x(t), t)$ mit
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t), t) = \rho_x \underbrace{\dot{x}(t)}_{=a(x(t))} + \rho_t = -a'(x(t))\rho(x(t), t) \quad (1)$$

nicht konstant, aber aus gewöhnlicher Differentialgleichung (1) berechenbar.

Beispiel: $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 e^t \quad t = \ln \frac{x}{x_0}, \quad \frac{d}{dt}\rho(x(t), t) = -\rho(x(t), t)$$

Regularität der Lösung unverändert in t , d.h. $\rho_0 \in C^k(\mathbb{R}) \Rightarrow \rho(\cdot, t) \in C^k(\mathbb{R}), t > 0$
 $\rho \in C^k(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t)$

Aufgabe

Gegeben sei die *lineare Advektionsgleichung*

$$u_t + au_x = 0, \quad u|_{t=0} = u_0, \quad (2)$$

mit der Konstanten a und der integrierbaren Anfangsverteilung u_0 . Überprüfen Sie, daß die Funktion $u(x, t) = u_0(x - at)$ die *Integralform* von (2):

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x, t_2) dx = \int_{x_1}^{x_2} u(x, t_1) dx + a \int_{t_1}^{t_2} u(x_1, t) dt - a \int_{t_1}^{t_2} u(x_2, t) dt, \quad (3)$$

für beliebige x_1, x_2, t_1 und t_2 erfüllt.

Aufgabe zur Stabilität und CFL-Bedingung

Programmieren Sie das *Lax-Friedrichs-Schema* angewandt auf das periodische Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} u_t(x, t) + u_x(x, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= \frac{x^2}{2} \left(\frac{x^2}{2} - 1 \right) \quad \text{für } x \in [-1, 1], \\ u(1, t) &= u(-1, t) \quad \text{für } t \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (*)$$

Untersuchen Sie, was passiert, wenn die *CFL-Bedingung* (wie lautet sie?) verletzt ist. Plotten Sie hierzu die Anfangsverteilung, die Lösung zu den Zeitpunkten $T = 2, 4, \dots$, wenn $\Delta t < \Delta x$ bzw. $\Delta t = \Delta x$ gewählt wird, sowie die Lösung zum Zeitpunkt $T = 4$, wenn man $\Delta t = 1/50$ und $\Delta x = 1/55$ wählt.

Kommentieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe zur Numerik linearer Systeme: Numerische Diffusion und Dispersion

a) Zeigen Sie, daß das *Lax-Wendroff-Schema* zum Lösen von $\mathbf{u}_t + \mathbf{A}\mathbf{u}_x = \mathbf{0}$:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{2h} A(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{k^2}{2h^2} A^2(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \quad (4)$$

eine Approximation dritter Ordnung zu der *modifizierten Gleichung*

$$u_t + Au_x = \frac{h^2}{6} A \left(\frac{k^2}{h^2} A^2 - I \right) u_{xxx} \quad (5)$$

ist.

b) Programmieren Sie das Schema (4) für das Problem

$$\begin{aligned} u_t(x, t) + u_x(x, t) &= 0, \\ u(1, t) &= u(-1, t) \quad \text{für } t \in [0, \infty) \end{aligned}$$

und untersuchen Sie, was in den folgenden zwei Situationen passiert:

(i) $u(x, 0) = \frac{x^2}{2} \left(\frac{x^2}{2} - 1 \right), x \in [-1, 1]$ mit $k = \frac{1}{50}$ und $h = \frac{1}{30}$

$$(ii) \quad u(x, 0) = \begin{cases} 1 & , -1 \leq x < 0 \\ 0 & , 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{mit } k = \frac{1}{200} \text{ und } h = \frac{1}{100}.$$

Plotten Sie das Resultat am Zeitpunkt $T=2$ und kommentieren Sie es in Hinblick auf (5).

c) Berechnen Sie die modifizierte Gleichung der *expliziten Euler-Methode*

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{2h} A(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n).$$

Erklären Sie, weshalb diese Methode für alle k/h instabil sein wird.

Konservative Verfahren: Aufgabe

Zeigen Sie, daß das *Lax-Wendroff-Verfahren* zur Lösung von $u_t + au_x = 0$ hergeleitet werden kann, indem man $u(x_j - ak, t_n)$ mittels quadratischer Interpolation an den Punkten $U_{j-1}^n, U_j^n, U_{j+1}^n$ approximiert. Benutzen Sie diese Interpretation, um zu erklären, warum Oszillationen an einer Unstetigkeitsstelle beim Lax-Wendroff-Verfahren, aber nicht beim Upwind oder Lax-Friedrichs auftreten.

Aufgabe zu Hochgenauen Methoden: Flußbegrenzung, Anstiegsbegrenzung

Lösen Sie numerisch die folgende skalare Advektionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad -1 < x < 2, \quad t > 0$$

mit homogenen Neumann-Randbedingungen

$$u_x(-1, t) = u_x(2, t) = 0, \quad t > 0$$

und stückweise konstanten Anfangsdaten

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0.25 & , -1 \leq x < -0.5 \\ 0.75 & , -0.5 \leq x < -0.1 \\ 1.5 & , -0.1 \leq x < 0.6 \\ 1.75 & , 0.6 \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

Implementieren Sie hierzu das *Godunov-Verfahren* sowie das *Verfahren mit Minmod-Anstiegsbegrenzung*.

Vergleichen Sie die Resultate mit denen vom *Lax-Friedrichs-Schema* (5. Übungsblatt) und *Lax-Wendroff-Schema* (6. Übungsblatt).

Plotten Sie die Lösungen im Intervall $[-0.2, 1.4]$ jeweils zum Zeitpunkt $T = 1$ für die zwei Situationen $\Delta t = 1/200, \Delta x = 1/100$ und $\Delta t = 1/800, \Delta x = 1/400$.

Literatur:

- R.J. LeVeque, *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhäuser, 1990, Kapitel 3.1