Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Sommersemester 2006

1. Übungsblatt zur Vorlesung "Theorie und Numerik hyperbolischer Erhaltungsgleichungen"

(Skalare Erhaltungsgleichungen und lineare hyperbolische Systeme)

1. Aufgabe

(UE)

Gegeben sei die *lineare Advektionsgleichung*

$$u_t + a u_x = 0, \qquad u|_{t=0} = u_0, \tag{1}$$

mit der Konstanten a und der integrierbaren Anfangsverteilung u_0. Überprüfen Sie, daß die Funktion $u(x,t) = u_0(x - at)$ die *Integralform* von (1):

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x,t_2)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} u(x,t_1)\,dx + a\int_{t_1}^{t_2} u(x_1,t)\,dt - a\int_{t_1}^{t_2} u(x_2,t)\,dt, \tag{2}$$

für beliebige x_1, x_2, t_1 und t_2 erfüllt.

2. Aufgabe (6 Punkte (2+4))

Betrachten Sie das eindimensionale, *skalare Cauchyproblem*

$$u_t + f(u)_x = 0, \qquad u|_{t=0} = u_0. \tag{3}$$

a) Zeigen Sie, daß sich die von den zwei Punkten $x_1 < x_2$ ausgehenden *Charakteristiken* zum Zeitpunkt

$$T = \frac{x_2 - x_1}{f'(u_0(x_1)) - f'(u_0(x_2))}$$

schneiden und folgern Sie daraus, daß das Problem (3) genau dann eine *klassische Lösung* besitzt, wenn $f'(u_0(x))$ monoton steigend in x ist.

b) Sei nun die *Flußfunktion* $f(u)$ konvex und für die Anfangsbedingung gelte $u_0'(\xi) < 0$. Zeigen Sie, daß sich die von einer Umgebung von ξ ausgehenden Charakteristiken spätestens zum Zeitpunkt

$$T = -\frac{1}{f''(u_0(\xi))u_0'(\xi)}$$

kreuzen und schließen Sie daraus, daß das Cauchyproblem (3) mit stetig differenzierbaren Anfangsdaten u_0 eine auf das Zeitintervall $t \in [0,T]$ eingeschränkte Lösung besitzt, wobei

$$T = -\frac{1}{\min(\alpha, 0)}, \qquad \alpha = \min_{x\in\mathbb{R}} \frac{d}{dx} f'(u_0(x))$$

gilt. Warum gibt es im linearen Fall ($f(u)_x = a u_x$) immer eine klassische Lösung?

3. Aufgabe (4 Punkte)

Lösen Sie die *linearisierte Flachwassergleichung*

$$\begin{pmatrix} v \\ \varphi \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \bar{v} & 1 \\ \bar{\varphi} & \bar{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \varphi \end{pmatrix}_x = 0, \tag{4}$$

wobei $\bar{v}$ und $\bar{\varphi}$ Konstanten sind, mit gegebenen Anfangsbedingungen für v und φ.

4. Aufgabe (UE)

Überprüfen Sie, daß die Linearisierung der *Flachwassergleichung*

$$\begin{pmatrix} v \\ \varphi \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} v^2/2 + \varphi \\ v\varphi \end{pmatrix}_x = 0, \tag{5}$$

das System (4) liefert. Was ist die "*Schallgeschwindigkeit*" für dieses System?

- Die Aufgaben mit (UE) werden in der Übung am Fr, 5.05. vorgerechnet.
- **Abgabe** der Lösungen zu den Aufgaben am Di, 9.05. **vor** der Vorlesung.