Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Sommersemester 2006

4. Übungsblatt zur Vorlesung
"Theorie und Numerik hyperbolischer Erhaltungsgleichungen"
(Konservative Verfahren: Konsistenz, Zweischritt–Verfahren und approximative Riemann–Löser)

1. Aufgabe (UE)

Zeigen Sie, daß das *modifizierte Upwind-Schema*

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h} U_j^n (U_j^n - U_{j-1}^n)$$

zum Lösen der Burgers Gleichung in der quasilinearen Form

$$u_t + uu_x = 0$$

(unter der Annahme $u(x,t) \geq 0$ für alle x, t) konsistent ist zu den beiden Gleichungen

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0,$$
$$(u^2)_t + \left(\frac{2}{3}u^3\right)_x = 0,$$

die jedoch andere Schockgeschwindigkeiten besitzen.

2. Aufgabe (UE)

Überprüfen Sie, daß der *Lax-Friedrichs-Fluß*

$$F(U_j^n, U_{j+1}^n) = \frac{h}{2k}(U_j^n - U_{j+1}^n) + \frac{1}{2}\big(f(U_j^n) + f(U_{j+1}^n)\big)$$

konsistent ist (inklusive der Lipschitz–Stetigkeit).

3. Aufgabe (5 Punkte (1+2+2))

Das *Richtmyer-Zweischritt-Lax-Wendroff-Verfahren* ist gegeben durch

$$U_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(U_j^n + U_{j+1}^n) - \frac{k}{2h}\big[f(U_{j+1}^n) - f(U_j^n)\big]$$
$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h}\big[f(U_{j+1/2}^{n+1/2}) - f(U_{j-1/2}^{n+1/2})\big].$$

Zeigen Sie:

a) Für lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten reduziert sich das Verfahren auf die klassische Lax-Wendroff-Methode.

b) Das Verfahren ist 2.Ordnung (für glatte Lösungen des nichtlinearen Problems).

c) Das Verfahren ist konservativ. Wie lautet der numerische Fluß?

4. Aufgabe (UE)

Zeigen Sie, daß das *Lax-Wendroff–Verfahren* zur Lösung von $u_t + au_x = 0$ hergeleitet werden kann, indem man $u(x_j - ak, t_n)$ mittels quadratischer Interpolation an den Punkten U_{j-1}^n, U_j^n, U_{j+1}^n approximiert. Benutzen Sie diese Interpretation, um zu erklären, warum Oszillationen an einer Unstetigkeitsstelle beim Lax-Wendroff–Verfahren, aber nicht beim Upwind oder Lax-Friedrichs auftreten.

5. Aufgabe (3 Punkte)

Überprüfen Sie, daß bei der numerischen Berechnung der approximativen Riemann–Lösung $\hat{w}(x/t)$ betrachtet als *exakte* Riemann–Lösung einer *modifizierten Erhaltungsgleichung* $\hat{u}_t + \hat{f}(\hat{u})_x = 0$ die resultierende *numerische Flußfunktion* gegeben ist durch

$$F(u_l, u_r) = \hat{f}(\hat{w}(0)) + f(u_r) - \hat{f}(u_r).$$

6. Aufgabe (2 Punkte)

Bestimmen Sie eine *Roe–Matrix* für die *Flachwassergleichung*

$$\begin{pmatrix} v \\ \varphi \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} v^2/2 + \varphi \\ v\varphi \end{pmatrix}_x = 0.$$

- Die Aufgaben mit (UE) werden in der Übung am Fr, 16.06. vorgerechnet.
- **Abgabe** der Lösungen zu den Aufgaben am Fr, 20.06. **vor** der Vorlesung.