Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Sommersemester 2006

Projektblatt *Advektionsgleichung* zur Vorlesung "Theorie und Numerik hyperbolischer Erhaltungsgleichungen"

Lineare Advektionsgleichung $\mathbf{u_t + a u_x = 0}$

• allgemeine Lösung: $\rho(x,t) = \rho_0(x - at), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}$
ρ_0 evtl. unstetig (singulär)
• Lösung konstant entlang der *Charakteristik* $x - at =$ konst.
$t = \frac{x-c}{a}$, $c = x_0$ Transport der Information entlang der Charakteristiken
Charakteristik erfüllt $\begin{cases} \dot{x}(t) = a \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad x(t) = at + x_0$
Lösung ρ entlang der Charakteristik $\big(x(t), t\big)$

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t),t) = \rho_x \underbrace{\dot{x}(t)}_{=a} + \rho_t = 0 \Rightarrow \rho = \text{konst.}$$

Advektionsgleichung mit variablen Koeffizienten $\mathbf{u_t + \big(a(x)u\big)_x = 0}$

• Lösung ρ entlang der Charakteristik $\big(x(t), t\big)$ mit $\begin{cases} \dot{x}(t) = a(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t),t) = \rho_x \underbrace{\dot{x}(t)}_{=a(x(t))} + \rho_t = -a'(x(t))\rho(x(t),t) \tag{1}$$

nicht konstant, aber aus gewöhnlicher Differentialgleichung (1) berechenbar.
Beispiel: $\mathbf{a(x) = x}$
$\Rightarrow \quad x(t) = x_0 e^t \; t = \ln \frac{x}{x_0}, \quad \frac{d}{dt}\rho(x(t),t) = -\rho(x(t),t)$
Regularität der Lösung unverändert in t, d.h. $\rho_0 \in C^k(\mathbb{R}) \Rightarrow \rho(.,t) \in C^k(\mathbb{R}), t > 0$
$\rho \in C^k(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t)$

Aufgabe

Gegeben sei die *lineare Advektionsgleichung*

$$u_t + a u_x = 0, \qquad u|_{t=0} = u_0, \tag{2}$$

mit der Konstanten a und der integrierbaren Anfangsverteilung u_0. Überprüfen Sie, daß die Funktion $u(x,t) = u_0(x - at)$ die *Integralform* von (2):

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x,t_2)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} u(x,t_1)\,dx + a\int_{t_1}^{t_2} u(x_1,t)\,dt - a\int_{t_1}^{t_2} u(x_2,t)\,dt, \tag{3}$$

für beliebige x_1, x_2, t_1 und t_2 erfüllt.

Aufgabe zur Stabilität und CFL–Bedingung

Programmieren Sie das *Lax-Friedrichs-Schema* angewandt auf das periodische Anfangs-randwertproblem

$$\begin{aligned} u_t(x,t) + u_x(x,t) &= 0, \\ u(x,0) &= \frac{x^2}{2}\Big(\frac{x^2}{2} - 1\Big) \quad \text{für } x \in [-1,1], \\ u(1,t) &= u(-1,t) \quad \text{für } t \in [0,\infty). \end{aligned} \tag{*}$$

Untersuchen Sie, was passiert, wenn die *CFL–Bedingung* (wie lautet sie?) verletzt ist. Plotten Sie hierzu die Anfangsverteilung, die Lösung zu den Zeitpunkten $T = 2, 4, ...,$ wenn $\Delta t < \Delta x$ bzw. $\Delta t = \Delta x$ gewählt wird, sowie die Lösung zum Zeitpunkt $T = 4$, wenn man $\Delta t = 1/50$ und $\Delta x = 1/55$ wählt.
Kommentieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe zur Numerik linearer Systeme: Numerische Diffusion und Dispersion

a) Zeigen Sie, daß das *Lax-Wendroff-Schema* zum Lösen von $\mathbf{u_t} + \mathbf{A}\mathbf{u_x} = \mathbf{0}$:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{2h}A(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{k^2}{2h^2}A^2(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \tag{4}$$

eine Approximation dritter Ordnung zu der *modifizierten Gleichung*

$$u_t + Au_x = \frac{h^2}{6}A\left(\frac{k^2}{h^2}A^2 - I\right)u_{xxx} \tag{5}$$

ist.

b) Programmieren Sie das Schema (4) für das Problem

$$\begin{aligned} u_t(x,t) + u_x(x,t) &= 0, \\ u(1,t) &= u(-1,t) \quad \text{für } t \in [0,\infty) \end{aligned}$$

und untersuchen Sie, was in den folgenden zwei Situationen passiert:

(i) $u(x,0) = \dfrac{x^2}{2}\left(\dfrac{x^2}{2} - 1\right)$, $x \in [-1,1]$ mit $k = \dfrac{1}{50}$ und $h = \dfrac{1}{30}$

(ii) $u(x,0) = \begin{cases} 1 & ,-1 \leq x < 0 \\ 0 & ,0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ mit $k = \dfrac{1}{200}$ und $h = \dfrac{1}{100}$.

Plotten Sie das Resultat am Zeitpunkt $T=2$ und kommentieren Sie es in Hinblick auf (5).

c) Berechnen Sie die modifizierte Gleichung der *expliziten Euler-Methode*

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{2h} A(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n).$$

Erklären Sie, weshalb diese Methode für alle k/h instabil sein wird.

Konservative Verfahren: Aufgabe

Zeigen Sie, daß das *Lax-Wendroff–Verfahren* zur Lösung von $u_t + au_x = 0$ hergeleitet werden kann, indem man $u(x_j - ak, t_n)$ mittels quadratischer Interpolation an den Punkten U_{j-1}^n, U_j^n, U_{j+1}^n approximiert. Benutzen Sie diese Interpretation, um zu erklären, warum Oszillationen an einer Unstetigkeitsstelle beim Lax-Wendroff–Verfahren, aber nicht beim Upwind oder Lax-Friedrichs auftreten.

Aufgabe zu Hochgenaue Methoden: Flußbegrenzung, Anstiegsbegrenzung

Lösen Sie numerisch die folgende skalare Advektionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad -1 < x < 2, \quad t > 0$$

mit homogenen Neumann-Randbedingungen

$$u_x(-1,t) = u_x(2,t) = 0, \quad t > 0$$

und stückweise konstanten Anfangsdaten

$$u(x,0) = \begin{cases} 0.25 & ,-1 \leq x < -0.5 \\ 0.75 & ,-0.5 \leq x < -0.1 \\ 1.5 & ,-0.1 \leq x < 0.6 \\ 1.75 & ,0.6 \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

Implementieren Sie hierzu das *Godunov-Verfahren* sowie das *Verfahren mit Minmod-Anstiegsbegrenzung*.
Vergleichen Sie die Resultate mit denen vom *Lax-Friedrichs-Schema* (5. Übungsblatt) und *Lax-Wendroff-Schema* (6. Übungsblatt).
Plotten Sie die Lösungen im Intervall $[-0.2, 1.4]$ jeweils zum Zeitpunkt $T = 1$ für die zwei Situationen $\Delta t = 1/200$, $\Delta x = 1/100$ und $\Delta t = 1/800$, $\Delta x = 1/400$.

Literatur:

- R.J. LeVeque, *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhäuser, 1990, Kapitel 3.1