Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Sommersemester 2006

Projektblatt *Flachwassergleichung*
zur Vorlesung
"Theorie und Numerik hyperbolischer Erhaltungsgleichungen"

Wir betrachten ein Fluid in einem Kanal und nehmen an, daß die vertikale Geschwindigkeit des Fluids vernachlässigbar ist und *Horizontalgeschwindigkeit* $v(x,t)$ in jedem senkrechten Querschnitt annähernd konstant ist. Dies trifft zu, wenn wir Amplitudenwellen in einem Fluid betrachten, das seicht ist relativ zur Wellenlänge.
Wir nehmen nun an, daß das Fluid inkompressibel ist, d.h. die Dichte $\bar{\rho}$ ist konstant. Stattdessen variiert die Höhe $h(x,t)$ und somit ergibt sich die *Gesamtmasse* im Intervall $[x_1, x_2]$ zur Zeit t als

$$\text{Gesamtmasse in } [x_1, x_2] = \int_{x_1}^{x_2} \bar{\rho}\, h(x,t)\, dx.$$

Der *Impuls* an jedem Punkt ist $\bar{\rho}\, v(x,t)$ und eine vertikale Integration davon ergibt den *Massenfluß* $\bar{\rho}\, v(x,t)\, h(x,t)$. Die Konstante $\bar{\rho}$ fällt heraus aus der *Erhaltungsgleichung für die Masse*

$$h_t + (vh)_x = 0. \tag{1}$$

Die *Erhaltungsgleichung für den Impuls* hat die gleiche Form wie bei den Euler Gleichungen, nämlich

$$(\bar{\rho}hv)_t + (\bar{\rho}hv^2 + p)_x = 0, \tag{2}$$

wobei der Druck p bestimmt wird durch ein hydrostatisches Gesetz, welches besagt, daß der Druck in der Tiefe y gleich $\bar{\rho}gy$ ist (g ist die Gravitationskonstante). Integiert man dieses Gesetz vertikal von $y = 0$ bis $y = h(x,t)$ ergibt dies den Gesamtdruck an (x,t):

$$p = \frac{1}{2}\bar{\rho}gh^2. \tag{3}$$

Benutzt man dies in (2), so erhält man

$$(hv)_t + \left(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)_x = 0, \tag{4}$$

Gleichung (4) kann vereinfacht werden, indem man die Terme ausdifferenziert und mit Hilfe von (1) den h_t Term ersetzt. Dann reduziert sich (4) zu

$$(v)_t + \left(\frac{1}{2}v^2 + gh\right)_x = 0. \tag{5}$$

Schließlich kann die explizite Abhängigkeit von g durch die Einführung der neuen Variablen $\varphi = gh$ in (1) und (5) eliminiert werden. Man erhält das System für die eindimensionale Flachwassergleichung:

$$\begin{pmatrix} v \\ \varphi \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} v^2/2 + \varphi \\ v\varphi \end{pmatrix}_x = 0. \tag{FWG}$$

Linearisierung von nichtlinearen Systemen

a) Lösen Sie die *linearisierte Flachwassergleichung*

$$\begin{pmatrix} v \\ \varphi \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \bar{v} & 1 \\ \bar{\varphi} & \bar{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \varphi \end{pmatrix}_x = 0, \tag{LFWG}$$

wobei $\bar{v}$ und $\bar{\varphi}$ Konstanten sind, mit gegebenen Anfangsbedingungen für v und φ.

b) Überprüfen Sie, daß die *Linearisierung* der Flachwassergleichung (FWG) das System (LFWG) liefert. Was ist die "*Schallgeschwindigkeit*" für dieses System?

Nichtlineare Systeme: Hugoniot-Locus, Schocks

Betrachten Sie die Flachwassergleichung (FWG).

a) Bestimmen Sie den *Hugoniot–Locus*.

b) Zeigen Sie, daß eine schwache Lösung des *Riemann–Problems*, die nur aus Schocks besteht, immer existiert, falls φ_l, $\varphi_r > 0$ ist. Bestimmen Sie den Zwischenzustand u_m für gegebene Zustände u_l und u_r.

c) Zeigen Sie, daß beide Felder *echt nichtlinear* sind.

d) Geben Sie eine physikalische Interpretation der *Entropiebedingung* für dieses System an.

Konservative Verfahren: Approximative Riemann–Löser

Bestimmen Sie eine *Roe–Matrix* für die Flachwassergleichung (FWG).
Anwendung Lawinen (N), atmosphärische Strömungen (M)

Literatur:

(L1) R.J. LeVeque, *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhäuser, 1990, Kapitel 5.4.

(L2) R.J. LeVeque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, 2002, Kapitel 13.

(M) A. Majda, *Introduction to PDEs and waves for the atmosphere and ocean*, Courant Lecture Notes in Mathematics 9, American Mathematical Society (AMS), 2003.

(N) A.N. Nazarov, *Mathematical modeling of a snow-powder avalanche in the framework of the equations of two-layer shallow water*, Fluid Dyn. **26** (1991) 70–75.

(W) G. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley-Interscience, 1974, Kapitel 5.7 und Kapitel 13.

(WSS) A. Vande Wouwer, Ph. Saucez und W.E. Schiesser, *Adaptive Method of Lines*, Chapman & Hall, 2001, Kapitel 5 und Kapitel 6.