Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Sommersemester 2006

Projektblatt *Isotherme Euler–Gleichung*
zur Vorlesung
"Theorie und Numerik hyperbolischer Erhaltungsgleichungen"

Wir betrachten die Gasströmung in einer Röhre, die in einem Bad mit konstanter Temperatur $\bar{T}$ eingetaucht ist und nehmen an, daß dieses Bad eine konstante Temperatur innerhalb des Gases aufrechterhält. Dann reduziert sich das *ideale Gasgesetz* $p = R\rho T$ zu

$$p = c^2 \rho, \tag{1}$$

wobei $c^2 \equiv R\bar{T}$ eine Konstante und c die Schallgeschwindigkeit ist. Die Aufrechterhaltung dieser konstanten Temperatur benötigt einen Wärmefluß durch die Rohrwand und somit wird die Energie in der Röhre nicht mehr konserviert. Allerdings bleiben weiterhin Masse und Impuls erhalten und diese Erhaltungsgleichungen zusammen mit der Zustandsgleichung (1) führen zu der *isothermen Euler–Gleichung*

$$\begin{pmatrix} \rho \\ m \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} m \\ m^2/\rho + c^2\rho \end{pmatrix}_x = 0. \tag{2}$$

Aufgabe

Leiten Sie die folgenden Ausdrücke

$$\begin{aligned} \rho(\xi) &= \rho_l \, e^{(\xi - \xi_1)/c}, \\ m(\xi) &= \rho_l (\xi - c) \, e^{(\xi - \xi_1)/c}, \end{aligned}$$

also

$$m(\rho) = \rho \, \frac{m_l}{\rho_l} + c\rho \, \ln \frac{\rho}{\rho_l} \tag{3}$$

für 2-Verdünnungswellen im Phasenraum der isothermen Eulergleichung (2) her.
Benutzen Sie dazu

$$r_2(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ m/\rho + c \end{pmatrix}, \qquad \nabla_u \lambda_2(u) \cdot r_2(u) = \frac{c}{\rho}.$$

Aufgabe

Überprüfen Sie anhand von (3), daß $m'(\rho_l) = \lambda_2(u_l)$ gilt und erklären Sie, warum dies so sein muß.

Literatur:

- R.J. LeVeque, *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhäuser, 1990, Kapitel 5.3