Technische Universität Berlin Sommersemester 2006
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Projektblatt *Kynch–Gleichung*
zur Vorlesung
"Theorie und Numerik hyperbolischer Erhaltungsgleichungen"

Sedimentationsprozesse werden in vielen Anwendungen der Umwelt- und Aufbereitungstechnik zur Trennung von Fest–Flüssig–Gemischen (Suspensionen) in ihre Bestandteile eingesetzt. Zwei Beispiele sind Nachklärbecken in Kläranlagen und Eindicker in der Erzaufbereitung. Zum Entwurf, zur Auslegung und zur Steuerung solcher Sedimentationsbehälter benötigt man mathematische Modelle.
Die *Kynch-Gleichung* ist ein Sedimentationsmodell für das Absetzverhalten kleiner gleichgroßer Partikel, z.B. Glasperlen, in einer viskosen Flüssigkeit in einem geschlossenen Behälter, etwa einem Standzylinder.
Die gesuchte Dichte ist hier die *volumetrische Feststoffkonzentration* u, die zwischen Null und einem maximalen Wert u_{max}, etwa $u_{max} = 0.66$ entsprechend der maximalen Kugelpackungsdichte, variieren kann. Hierbei wird angenommen, daß u über jeden horizontalen Behälterquerschnitt konstant ist, d.h. bezeichnet z die Höhe, so ist $u = u(z,t)$. Kynch (K) schlug 1952 eine Sedimentationsmodell für das Absetzverhalten einer Suspension vor mit der entscheidenden Annahme, die lokale Geschwindigkeitsdifferenz zwischen der absinkenden Teilchenphase und der aufsteigenden Fluidphase sei eine Funktion der lokalen Feststoffkonzentration, also

$$v_s - v_f = v_r(u), \tag{1}$$

wobei v_s die Feststoff- und v_f die Flüssigkeitsphasengeschwindigkeit und $v_r = v_r(u)$ die Relativgeschwindigkeit zwischen beiden Phasen bezeichnet. Bei einem geschlossenen Behälter muß der Feststoffvolumenstrom uv_s in jeder Höhe und zu jedem Zeitpunkt durch einen entgegengerichteten Flüssigkeitsvolumenstrom $-(1-u)v_f$ balanciert werden, d.h. es gilt überall

$$uv_s = -(1-u)v_f, \text{ also } v_s = (1-u)(v_s - v_f) = (1-u)v_r(u). \tag{2}$$

Setzt man nun (2) in die Feststofferhaltungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(uv_s) = 0 \tag{3}$$

ein, so ergibt sich die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f_{bk}(u)}{\partial z} = 0, \quad f_{bk} := u(1-u)v_r(u), \tag{4}$$

in der $f_{bk}(\cdot)$ die sog. *Kynchsche Feststoffflußdichtefunktion* ist. Ein häufig verwendeter Ansatz ist

$$f_{bk}(u) = \begin{cases} u_\infty u(1-u)^C, \quad v_\infty < 0, C > 1, & \text{falls } 0 \le u \le u_{max}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{5}$$

bei dem v_∞ die Stokes–Geschwindigkeit ist, d.h. die Absetzgeschwindigkeit eines Partikels des Radius d in einem puren Fluid der Viskosität μ_f mit der Fest-Flüssig-Dichtedifferenz Δ_ρ und der Fallbeschleunigung g:

$$v_\infty = -\frac{\Delta_\rho g r^2}{18\mu_f}. \tag{6}$$

Man überzeugt sich leicht, daß $lim_{u\to 0} v_s = v_\infty$ gilt.

Aufgabe

Betrachten Sie die Kynch-Gleichung in der normalisierten Form

$$u_t + \big(v(u)u\big)_z = 0, \quad 0 \le z \le 1,\ t \ge 0, \tag{7}$$

wobei die Absetzgeschwindigkeit $v(u)$ wie folgt von der Konzentration abhängt:

$$v(u) = (1-u)^\beta, \quad \beta = \text{konst.}$$

Setzen Sie hier $\beta = 1.5$. Die Randbedingungen sind

$u(0,t) = 0$ keine Einströmung an der Oberfläche

$u(1,t) = 1$ Konzentration am Boden = maximale Kugelpackungsdichte

Schreiben Sie ein Programm, um herauszufinden, nach welcher Zeit sich alle Partikel am Boden abgesetzt haben. Die Anfangskonzentration ist

$$u_0(z) = \begin{cases} 0.9, & 0.3 \le z \le 0.5 \\ 0.3 + 0.2z, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Nach einer gewissen Zeit besteht die Lösung aus drei Schocks und einem Verdünnungsfächer.

a) Berechnen Sie die charakterische Geschwindigkeit und benutzen Sie sie, um zu zeigen, daß beide Randbedingungen benötigt werden und um eine Daumenregel für den maximalen Zeitschritt zu bestimmen.

b) Es wäre ebenfalls ein sachgemäß gestelltes Problem, wenn man keine Bedingung an $z = 1$ stellt, aber natürlich wäre die Lösung unterschiedlich. Was ist die physikalische Interpretation von diesem Fall?

c) Betrachten Sie die McCormack–Zweischritt–Variante des Lax-Wendroff–Schemas (Gleichung (12.27) in (L)).

   (i) Zeigen Sie für ein lineares System mit konstanten Koeffizienten, i.e. $u_t + Au_z = 0$, daß die Methode mit dem Lax-Wendroff–Schema äquivalent ist. Beachten Sie, daß hierfür die Jacobimatrix nicht gebraucht wird, was den Code sehr effizient macht.

(ii) Für dieses Problem wird künstliche Dissipation benötigt. Modifizieren Sie die Methode durch die Addition eines dissipativen Terms $(\mu u_z)_z$ auf der rechetn Seite von (7). Dieser Term sollte mit $\delta_+(\mu\delta_- U^n)$ und $\delta_-(\mu\delta_+ U^*)$ in der ersten bzw. zweiten Zeile von (12.27) diskretisiert werden.

(iii) Implementieren Sie die Methode mit einem Zeitschritt $k = \lambda h$, wobei λ klein genug ist, um die Rechnungen stabil zu machen. Wenn das Programm läuft, experimentieren Sie mit der Menge der künstlichen Dissipation μ. Es wird sich dabei als brauchbar erweisen, $\mu = h\tilde{\mu}$ mit konstanten $\tilde{\mu}$ zu verwenden. Sie werden Oszillationen beobachten, wenn μ zu klein und unphysikalisch glatte Lösungen, wenn μ zu groß ist. Wählen Sie den "besten" Wert für ihre Lösung an einer Zeit t_0, wenn alle 4 Fronten sichtbar sind. Erstellen Sie einen Graph mit den Kurven von $u(z, t_0)$ für $h = 0.05, 0.025, 0.0125$ (3 Kurven im selben Graph). Untersuchen Sie auch die Konvergenzrate.

d) Was passiert nach langer Zeit? Setzen sich die Partikel ab?

Literatur:

(BCBT) M.C. Bustos, F. Concha, R. Bürger und E.M. Tory, *Sedimentation and Thickening*, Kluwer Academic Publishers, 1999.

(B) R. Bürger, *Manuskript zur Vorlesung "Hyperbolische Erhaltungsgleichungen"*, Universität Stuttgart, 2000.

(K) G.J. Kynch, *A theory on sedimentation*, Trans.Faraday Society, London, **48** (1952), 166–176.

(L) R.J. LeVeque, *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhäuser, 1990.

(W) G. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley-Interscience, 1974, Kapitel 3.4.