Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Sommersemester 2006

Projektblatt *Verkehrsfluß*
zur Vorlesung
"Theorie und Numerik hyperbolischer Erhaltungsgleichungen"

Wir betrachten den Verkehrsfluß auf einer einspurigen Autobahn. Die Variable ρ bezeichne die *lokale Fahrzeugdichte* (gemessen etwa in Fahrzeugen pro Kilometer) und u die *Geschwindigkeit* eines Fahrzeugs. Wir betrachten hier Lösungen $0 \leq \rho \leq \rho_{max}$, wobei ρ_{max} die Dichte ist, bei der die Fahrzeuge Stoßstange an Stoßstange fahren. Die Geschwindigkeit liege in einem Bereich zwischen 0 und einer maximalen Geschwindigkeit u_{max}. Da die Autos erhalten bleiben, müssen Dichte und Geschwindigkeit die Erhaltungsgleichung

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0. \tag{1}$$

erfüllen.
Wir nehmen weiter an, daß die Geschwindigkeit eine Funktion der Autodichte ist, d.h. $u = u(\rho)$. Um eine Relation zwischen der Autodichte ρ und der Geschwindigkeit u herzuleiten, machen wir folgende Annahmen: bei einer Autodichte $\rho = 0$, also einer leeren Straße fahren die Autos mit der maximalen Geschwindigkeit u_{max}. Fahren die Autos Stoßstange an Stoßstange (also $\rho = \rho_{max}$), so sei $u = 0$. Zwischen diesen beiden Extremen werde die Geschwindigkeit linear interpoliert. Dies führt auf die folgende Definition für die Funktion $u = u(\rho)$:

$$u(\rho) = u_{max}\Big(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\Big), \quad 0 \leq \rho \leq \rho_{max}. \tag{2}$$

Dies ist das sog, *Lighthill-Whitham-Richards–Modell.* Mit dieser Funktion erhält man die Differentialgleichung

$$\rho_t + \Big[\rho\, u_{max}\big(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\big)\Big]_x = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{3}$$

mit Anfangswert

$$\rho(x,0) = \begin{cases} \rho_l, & x < 0 \\ \rho_r, & x > 0 \end{cases}. \tag{4}$$

Zur mathematischen Beschreibung der Ampel betrachten wir zwei verschiedene Phasen: die Rotphase und die Grünphase. Wenn die Zeit im Intervall $[0, T_{\text{rot}}]$ liegt, sei die Ampel rot, liegt die Zeit in $[T_{\text{rot}}, T_{\text{rot}} + T_{\text{grün}}]$ sei die Ampel grün, usw.
Bei roter Ampel lösen wir obige Differentialgleichung für $x < 0$ und für $x > 0$. An $x = 0$ brauchen wir also eine Randbedingung: Wir schreiben ρ_{max} vor. Bei grüner Ampel lösen wir die Differentialgleichung für alle $x \in \mathbb{R}$.

Eine interaktive Online-Berechnung dieses Verkehrsproblems kann man unter der Adresse `http://www.numerik.mathematik.uni-mainz.de/traffic/` finden.
Bei Betrachtung des Ort-Dichte-Diagramms erkennt man, daß es zwei verschiedene Phänomene gibt. Zum einen gibt es Regionen, in denen die Dichte unstetig ist (dort wechselt die Farbe abrupt). Diese Unstetigkeiten nennt man *Schockwelle*. Die Geschwindigkeit, mit der sich der Schock fortbewegt, heißt *Schockwellengeschwindigkeit* und kann mittels der Formel

$$s = u_{max}\big(1 - \frac{\rho_l + \rho_r}{\rho_{max}}\big) \tag{5}$$

berechnet werden, wobei ρ_l und ρ_r die Werte links und rechts vom Schock bezeichnen.
Das andere Phänomen ist die *Verdünnungswelle*, die etwa auftritt, wenn die Ampel von Rot auf Grün umschaltet.
Beachten Sie, daß bei relativ großer Anfangsdichte der Fahrzeugstau vor der Ampel sich immer weiter nach links fortpflanzt. Nur bei hinreichend kleiner Anfangsdichte (mit von den Ampelphasen abhängigem Wert) kann der Stau vollständig abgebaut werden.

Aufgabe

Als vertiefende Literatur sei speziell (J) und Kapitel 3 in (W) empfohlen.

Literatur:

(AR) A. Aw und M. Rascle, *Resurrection of "second order" models of traffic flow*, SIAM J. Appl. Math. **60** (2000), 916–938.

(AKMR) A. Aw, A. Klar, T. Materne und M. Rascle, *Derivation of continuum traffic flow models from microscopic follow-the-leader models*, SIAM J. Appl. Math. **63** (2002), 259–278.

(D) C. Daganzo, *Requiem for second-order fluid approximation to traffic flow*, Transport. Res. B **29** (1995), 277–286.

(J) A. Jüngel, *Modeling and Numerical Approximation of Traffic Flow Problems*, Universität Mainz, Lecture Notes, Winter 2002.

(KKW) A. Klar, R. Kühne und R. Wegener, *Mathematical models for vehicular traffic*, Surv. Math. Ind. **6** (1996), 215–239.

(L1) R.J. LeVeque, *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhäuser, 1990, Kapitel 4.1.

(L2) R.J. LeVeque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, 2002, Kapitel 16.

(L3) R.J. LeVeque, *Some Traffic Flow Models Illustrating Interesting Hyperbolic Behavior* Preprint 2001-036, Conservation Law Preprint Server.

(LW) M.J. Lighthill und G. Whitham, *On kinematic waves: I. Flood movement in long rivers; II Theory of traffic flow on long crowded roads*, Proc. Roy. Soc. A **229** (1960), 281–345.

(M) T. Materne, *New models for traffic flow: Jam propagation and stop-and-go waves*, Dissertation, TU Darmstadt, Fachbereich Mathematik, 2002.

(R) P.I. Richards, *Shock waves on highways*, Oper. Res. **4** (1956), 42–51.

(W) G. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley-Interscience, 1974, Kapitel 3.1.