Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Sommersemester 2006

2. Übungsblatt zur Vorlesung
“Theorie und Numerik hyperbolischer Erhaltungsgleichungen”
(Nichtlineare hyperbolische Systeme: Hugoniot–Locus, Schocks, Verdünnungswellen und Integralkurven)

1. Aufgabe (UE)

Bestimmen Sie den Hugoniot–Locus der *Flachwassergleichung*

$$\begin{pmatrix} v \\ \varphi \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} v^2/2 + \varphi \\ v\varphi \end{pmatrix}_x = 0. \tag{1}$$

2. Aufgabe (6 Punkte (2+2+2))

Betrachten Sie die *Flachwassergleichung* (1).

a) Zeigen Sie, daß eine schwache Lösung des *Riemann–Problems*, die nur aus Schocks besteht, immer existiert, falls φ_l, $\varphi_r > 0$ ist. Bestimmen Sie den Zwischenzustand u_m für gegebene Zustände u_l und u_r.

b) Zeigen Sie, daß beide Felder *echt nichtlinear* sind.

c) Geben Sie eine physikalische Interpretation der *Entropiebedingung* für dieses System an.

3. Aufgabe (UE)

Leiten Sie die folgenden Ausdrücke

$$\begin{aligned} \rho(\xi) &= \rho_l\, e^{(\xi-\xi_1)/c}, \\ m(\xi) &= \rho_l(\xi - c)\, e^{(\xi-\xi_1)/c}, \end{aligned}$$

also

$$m(\rho) = \rho\,\frac{m_l}{\rho_l} + c\rho\,\ln\frac{\rho}{\rho_l} \tag{*}$$

für 2-Verdünnungswellen im Phasenraum der *isothermen Eulergleichungen*

$$\begin{pmatrix} \rho \\ m \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} m \\ m^2/\rho + c^2\rho \end{pmatrix}_x = 0.$$

her. Benutzen Sie dazu

$$r_2(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ m/\rho + c \end{pmatrix}, \qquad \nabla_u \lambda_2(u) \cdot r_2(u) = \frac{c}{\rho}.$$

4. Aufgabe (4 Punkte)

Überprüfen Sie anhand von (*), daß $m'(\rho_l) = \lambda_2(u_l)$ gilt und erklären Sie, warum dies so sein muß.

- Die Aufgaben mit (UE) werden in der Übung am Fr, 19.05. vorgerechnet.
- **Abgabe** der Lösungen zu den Aufgaben am Di, 23.05. **vor** der Vorlesung.