Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Sommersemester 2006

3. Übungsblatt zur Vorlesung
"Theorie und Numerik hyperbolischer Erhaltungsgleichungen"

(Numerik linearer Systeme: Stabilität, CFL–Bedingung, numerische Diffusion und Dispersion)

1. Aufgabe (5 Punkte)

Programmieren Sie das *Lax-Friedrichs-Schema* angewandt auf das periodische Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} u_t(x,t) + u_x(x,t) &= 0, \\ u(x,0) &= \frac{x^2}{2}\Big(\frac{x^2}{2} - 1\Big) \quad \text{für } x \in [-1,1], \\ u(1,t) &= u(-1,t) \quad \text{für } t \in [0,\infty). \end{aligned} \tag{*}$$

Untersuchen Sie, was passiert, wenn die *CFL–Bedingung* (wie lautet sie?) verletzt ist. Plotten Sie hierzu die Anfangsverteilung, die Lösung zu den Zeitpunkten $T = 2, 4, ...,$ wenn $\Delta t < \Delta x$ bzw. $\Delta t = \Delta x$ gewählt wird, sowie die Lösung zum Zeitpunkt $T = 4$, wenn man $\Delta t = 1/50$ und $\Delta x = 1/55$ wählt.
Kommentieren Sie das Ergebnis.

2. Aufgabe (5 Punkte (2+3))

a) Zeigen Sie, daß das *Lax-Wendroff-Schema* zum Lösen von $u_t + Au_x = 0$:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{2h} A(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{k^2}{2h^2} A^2 (U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \tag{1}$$

eine Approximation dritter Ordnung zu der *modifizierten Gleichung*

$$u_t + Au_x = \frac{h^2}{6} A \left(\frac{k^2}{h^2} A^2 - I \right) u_{xxx} \tag{2}$$

ist.

b) Programmieren Sie das Schema (1) für das Problem

$$\begin{aligned} u_t(x,t) + u_x(x,t) &= 0, \\ u(1,t) &= u(-1,t) \quad \text{für } t \in [0,\infty) \end{aligned}$$

und untersuchen Sie, was in den folgenden zwei Situationen passiert:

(i) $u(x,0) = \frac{x^2}{2}\left(\frac{x^2}{2} - 1\right),\ x \in [-1,1] \quad \text{mit } k = \frac{1}{50} \text{ und } h = \frac{1}{30}$

(ii) $u(x,0) = \begin{cases} 1 & , -1 \leq x < 0 \\ 0 & , 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{mit } k = \frac{1}{200} \text{ und } h = \frac{1}{100}.$

Plotten Sie das Resultat am Zeitpunkt $T=2$ und kommentieren Sie es in Hinblick auf (2).

3. Aufgabe (UE)

Berechnen Sie die modifizierte Gleichung der *expliziten Euler-Methode*

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{2h} A(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n).$$

Erklären Sie, weshalb diese Methode für alle k/h instabil sein wird.

- Die Aufgaben mit (UE) werden in der Übung am Fr, 2.06. vorgerechnet.
- **Abgabe** der Lösungen zu den Aufgaben am Fr, 6.06. **vor** der Vorlesung.