Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Sommersemester 2006

5. Übungsblatt zur Vorlesung
"Theorie und Numerik hyperbolischer Erhaltungsgleichungen"
(Konvergenz skalarer Verfahren und hochgenaue Methoden)

1. Aufgabe (UE)

Zeigen Sie die Identität $\|U\|_1 = \|\tilde{u}\|_1$, wobei $U = \{U_j\} \in \ell^1$ eine Gitterfunktion sei mit

$$\|U\|_1 = h \sum_{j=-\infty}^{\infty} |U_j|\,, \qquad \ell^1 = \{U : \|U\|_1 < \infty\},$$

und die *Erweiterung* von U zu einer stückweisen konstanten Funktion $\tilde{u}(x) = U_j$ für $x_{j-1/2} \le x < x_{j+1/2}$ ist. Überprüfen Sie ferner, daß $\|U\|_1 \le \|u\|_1$ gilt, falls man andererseits $u(x)$ auf eine Gitterfunktion U durch Bildung des *Zellenmittels*

$$U_j := \bar{u}_j \equiv \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x)\,dx$$

beschränkt.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Zeigen Sie, daß das *Lax-Friedrichs–Schema*

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}\big(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n\big) - \frac{k}{2h}\big(f(U_{j+1}^n) - f(U_{j-1}^n)\big)$$

ℓ^1-kontrahierend ist, falls die CFL-Bedingung $|kf'(u)/h| \le 1$ für alle u im Bereich $\min_j(U_j^n, V_j^n) \le u \le \max_j(U_j^n, V_j^n)$ erfüllt ist.

3. Aufgabe (UE)

Überprüfen Sie, daß die *Methode mit Anstiegsbegrenzung* für $u_t + au_x = 0$, $a > 0$ ist:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \nu(U_j^n - U_{j-1}^n) - \frac{1}{2}\nu(1-\nu)(h\sigma_j^n - h\sigma_{j-1}^n),$$

indem Sie die stückweise lineare Funktion

$$\tilde{u}^n(x, t_n) = U_j^n + \sigma_j^n(x - x_j), \quad x \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$$

auf dem Intervall $[x_{j-1/2} - ak, x_{j+1/2} - ak]$ integrieren. (Warum?)
Zeigen Sie weiterhin, daß für beliebiges Vorzeichen von a gilt:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \nu(U_{j_1}^n - U_{j_1-1}^n) - \frac{1}{2}\nu(\operatorname{sgn}\nu - \nu)(h\sigma_{j_1}^n - h\sigma_{j_1-1}^n)$$

mit

$$j_1 = \begin{cases} j & \text{für} \quad a > 0 \\ j+1 & \text{für} \quad a < 0 \end{cases}.$$

4. Aufgabe (6 Punkte)

Sei σ_{pj} der Anstiegsvektor für das p-te Feld eines linearen Systems:

$$\sigma_{jp} = \beta_{jp} r_p \in \mathbb{R}^m$$

mit

$$\beta_{jp} = \frac{1}{h}\,\mathrm{minmod}(V_{j+1,p} - V_{jp}, V_{jp} - V_{j-1,p}) = \frac{1}{h}\,\mathrm{minmod}(\alpha_{jp}, \alpha_{j-1,p}).$$

Weiterhin sei

$$\vartheta_{jp} = \frac{\alpha_{j_p p}}{\alpha_{jp}}, \quad \text{mit} \quad j_p = j - \mathrm{sgn}(\nu_p)$$

und φ die minmod-Anstiegsbegrenzung $\varphi(\vartheta) = \max(0, \min(1, \vartheta))$.
Zeigen Sie, daß dann der numerische Fluß der *Methode mit Anstiegsbegrenzung*

$$F(U; j) = F_L(U; j) + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{m} \lambda_p(\mathrm{sgn}(\nu_p) - \nu_p) h \sigma_{j_p p}$$

identisch ist mit dem numerischen Fluß der *Methode mit Flußbegrenzung*, sofern man

$$\sigma_{j_p p} = \varphi(\vartheta_{jp})\left(\frac{\alpha_{jp}}{h}\right) r_p$$

setzt (Verallgemeinerung von $\sigma_j = \vartheta_j (U_{j+1} - U_j)/h$).

5. Aufgabe (10 Punkte)

Lösen Sie numerisch die folgende skalare Advektionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad -1 < x < 2, \quad t > 0$$

mit homogenen Neumann-Randbedingungen

$$u_x(-1, t) = u_x(2, t) = 0, \quad t > 0$$

und stückweise konstanten Anfangsdaten

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0.25 & , -1 \le x < -0.5 \\ 0.75 & , -0.5 \le x < -0.1 \\ 1.5 & , -0.1 \le x < 0.6 \\ 1.75 & , 0.6 \le x \le 2 \end{cases}.$$

Implementieren Sie hierzu das *Godunov-Verfahren* sowie das *Verfahren mit Minmod-Anstiegsbegrenzung*.
Vergleichen Sie die Resultate mit denen vom *Lax-Friedrichs-Schema* (5. Übungsblatt) und *Lax-Wendroff-Schema* (6. Übungsblatt).
Plotten Sie die Lösungen im Intervall $[-0.2, 1.4]$ jeweils zum Zeitpunkt $T = 1$ für die zwei Situationen $\Delta t = 1/200$, $\Delta x = 1/100$ und $\Delta t = 1/800$, $\Delta x = 1/400$.

- Die Aufgaben mit (UE) werden in der Übung am Fr, 30.06. vorgerechnet.
- **Abgabe** der Lösungen zu den Aufgaben am Fr, 4.07. **vor** der Vorlesung.