Technische Universität Berlin Wintersemester 03/04
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

10. Übungsblatt zur Vorlesung "Theorie und Numerik hyperbolischer Erhaltungsgleichungen"

(Hochgenaue Methoden: Flußbegrenzung, Anstiegsbegrenzung)

1. Aufgabe (4 Punkte)

Überprüfen Sie, daß die *Methode mit Anstiegsbegrenzung* für $u_t + au_x = 0$, $a > 0$ ist:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \nu(U_j^n - U_{j-1}^n) - \frac{1}{2}\nu(1-\nu)(h\sigma_j^n - h\sigma_{j-1}^n),$$

indem Sie die stückweise lineare Funktion

$$\tilde{u}^n(x, t_n) = U_j^n + \sigma_j^n(x - x_j), \quad x \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$$

auf dem Intervall $[x_{j-1/2} - ak, x_{j+1/2} - ak]$ integrieren. (Warum ?)
Zeigen Sie weiterhin, daß für beliebiges Vorzeichen von a gilt:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \nu(U_{j_1}^n - U_{j_1-1}^n) - \frac{1}{2}\nu(\operatorname{sgn}\nu - \nu)(h\sigma_{j_1}^n - h\sigma_{j_1-1}^n)$$

mit

$$j_1 = \begin{cases} j & \text{für} \quad a > 0 \\ j+1 & \text{für} \quad a < 0 \end{cases}.$$

2. Aufgabe (6 Punkte)

Sei σ_{pj} der Anstiegsvektor für das p-te Feld eines linearen Systems:

$$\sigma_{jp} = \beta_{jp} r_p \in \mathbb{R}^m$$

mit

$$\beta_{jp} = \frac{1}{h}\operatorname{minmod}(V_{j+1,p} - V_{jp}, V_{jp} - V_{j-1,p}) = \frac{1}{h}\operatorname{minmod}(\alpha_{jp}, \alpha_{j-1,p}).$$

Weiterhin sei

$$\theta_{jp} = \frac{\alpha_{j_p p}}{\alpha_{jp}}, \quad \text{mit} \quad j_p = j - \operatorname{sgn}(\nu_p)$$

und ϕ die minmod-Anstiegsbegrenzung $\phi(\theta) = \max(0, \min(1, \theta))$.
Zeigen Sie, daß dann der numerische Fluß der *Methode mit Anstiegsbegrenzung*

$$F(U; j) = F_L(U; j) + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{m} \lambda_p(\operatorname{sgn}(\nu_p) - \nu_p) h\sigma_{j_p p}$$

identisch ist mit dem numerischen Fluß der *Methode mit Flußbegrenzung*, sofern man

$$\sigma_{j_p p} = \phi(\theta_{jp})\Big(\frac{\alpha_{jp}}{h}\Big) r_p$$

setzt (Verallgemeinerung von $\sigma_j = \theta_j(U_{j+1} - U_j)/h$).

3. Aufgabe (10 Punkte)

Lösen Sie numerisch die folgende skalare Advektionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad -1 < x < 2, \quad t > 0$$

mit homogenen Neumann-Randbedingungen

$$u_x(-1,t) = u_x(2,t) = 0, \quad t > 0$$

und stückweise konstanten Anfangsdaten

$$u(x,0) = \begin{cases} 0.25 & , -1 \leq x < -0.5 \\ 0.75 & , -0.5 \leq x < -0.1 \\ 1.5 & , -0.1 \leq x < 0.6 \\ 1.75 & , 0.6 \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

Implementieren Sie hierzu das *Godunov-Verfahren* sowie das *Verfahren mit Minmod-Anstiegsbegrenzung*.
Vergleichen Sie die Resultate mit denen vom *Lax-Friedrichs-Schema* (5. Übungsblatt) und *Lax-Wendroff-Schema* (6. Übungsblatt).
Plotten Sie die Lösungen im Intervall $[-0.2, 1.4]$ jeweils zum Zeitpunkt $T = 1$ für die zwei Situationen $\Delta t = 1/200$, $\Delta x = 1/100$ und $\Delta t = 1/800$, $\Delta x = 1/400$.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 20.01. **vor** der Vorlesung.
Abgabe der Lösungen zu der praktischen Aufgabe am Di, 27.01. **vor** der Vorlesung.