Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

6. Übungsblatt zur Vorlesung
“Theorie und Numerik hyperbolischer Erhaltungsgleichungen”
(Numerik linearer Systeme: Numerische Diffusion und Dispersion)

1. Aufgabe (6 Punkte (2+2+2))

a) Zeigen Sie, daß das *Lax-Wendroff-Schema* zum Lösen von $u_t + Au_x = 0$:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{2h} A(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{k^2}{2h^2} A^2 (U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \tag{1}$$

eine Approximation dritter Ordnung zu der *modifizierten Gleichung*

$$u_t + Au_x = \frac{h^2}{6} A \left(\frac{k^2}{h^2} A^2 - I \right) u_{xxx} \tag{2}$$

ist.

b) Programmieren Sie das Schema (1) für das Problem

$$u_t(x,t) + u_x(x,t) = 0,$$
$$u(1,t) = u(-1,t) \quad \text{für } t \in [0,\infty)$$

und untersuchen Sie, was in den folgenden zwei Situationen passiert:

(i) $u(x,0) = \frac{x^2}{2}\left(\frac{x^2}{2} - 1\right),\ x \in [-1,1] \quad$ mit $k = \frac{1}{50}$ und $h = \frac{1}{30}$

(ii) $u(x,0) = \begin{cases} 1 & , -1 \le x < 0 \\ 0 & , 0 \le x \le 1 \end{cases} \quad$ mit $k = \frac{1}{200}$ und $h = \frac{1}{100}$.

Plotten Sie das Resultat am Zeitpunkt $T = 2$ und kommentieren Sie es in Hinblick auf (2).

2. Aufgabe (4 Punkte)

Berechnen Sie die modifizierte Gleichung der *expliziten Euler-Methode*

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{2h} A(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n).$$

Erklären Sie, weshalb diese Methode für alle k/h instabil sein wird.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 9.12. **vor** der Vorlesung.
Abgabe der Lösungen zu der praktischen Aufgabe am Di, 16.12. **vor** der Vorlesung.