Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Wintersemester 03/04

7. Übungsblatt zur Vorlesung
"Theorie und Numerik hyperbolischer Erhaltungsgleichungen"

(Konservative Verfahren: Konsistenz, Zweischritt–Verfahren)

1. Aufgabe (3 Punkte)

Zeigen Sie, daß das *modifizierte Upwind-Schema*

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h} U_j^n (U_j^n - U_{j-1}^n)$$

zum Lösen der Burgers Gleichung in der quasilinearen Form

$$u_t + u u_x = 0$$

(unter der Annahme $u(x,t) \geq 0$ für alle x, t) konsistent ist zu den beiden Gleichungen

$$u_t + \Big(\frac{1}{2}u^2\Big)_x = 0,$$

$$(u^2)_t + \Big(\frac{2}{3}u^3\Big)_x = 0,$$

die jedoch andere Schockgeschwindigkeiten besitzen.

2. Aufgabe (2 Punkte)

Überprüfen Sie, daß der *Lax-Friedrichs-Fluß*

$$F(U_j^n, U_{j+1}^n) = \frac{h}{2k}(U_j^n - U_{j+1}^n) + \frac{1}{2}\big(f(U_j^n) + f(U_{j+1}^n)\big)$$

konsistent ist (inklusive der Lipschitz–Stetigkeit).

3. Aufgabe (5 Punkte (1+2+2))

Das *Richtmyer-Zweischritt-Lax-Wendroff-Verfahren* ist gegeben durch

$$U_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(U_j^n + U_{j+1}^n) - \frac{k}{2h}\big[f(U_{j+1}^n) - f(U_j^n)\big]$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h}\big[f(U_{j+1/2}^{n+1/2}) - f(U_{j-1/2}^{n+1/2})\big].$$

Zeigen Sie:

a) Für lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten reduziert sich das Verfahren auf die klassische Lax-Wendroff-Methode.

b) Das Verfahren ist 2.Ordnung (für glatte Lösungen des nichtlinearen Problems).

c) Das Verfahren ist konservativ. Wie lautet der numerische Fluß?

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 16.12. **vor** der Vorlesung.