Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Wintersemester 03/04

Projektblatt *Buckley-Leverett-Gleichung* zur Vorlesung "Theorie und Numerik hyperbolischer Erhaltungsgleichungen"

Die *Buckley–Leverett–Gleichung* ist ein vereinfachtes eindimensionales Modell für eine inkompressible Zweiphasenströmung nicht mischbarer Flüssigkeiten in einem porösen Medium. Sie wurde in (BL) eingeführt.
Eine mögliche Anwendung ist die Rohölgewinnung: Wenn nach Öl gebohrt wird, treibt der Druck einen Teil des Öls nach oben, aber ein Teil bleibt zurück. Um diesen Teil auch noch zu gewinnen, wird Wasser (evtl. mit Zusatzstoffen) eingepumpt. Das Ergebnis ist eine Mischung der beiden Flüssigkeiten. Die Unbekannte s in der Buckley-Leverett-Gleichung ist die sog. *reduzierte Sättigung* des Wassers in der Mischung ($s = 1$ bedeutet nur Wasser, $s = 0$ nur Öl). Wir nehmen die Porositätskonstante eins an und vernachlässigen Gravitation und Kapillarität. Dann erfüllt die reduzierte Sättigung des Wassers s die *skalare Erhaltungsgleichung*

$$s_t + \big(f(s)\big)_x = 0 \text{ mit } f(s) = \frac{\frac{k_w^r(s)}{\mu_w}}{\frac{k_w^r(s)}{\mu_w} + \frac{k_o^r(s)}{\mu_o}}, \tag{1}$$

bei der die Indizes w und o Wasser bzw. Öl bezeichnen, μ die (konstante) Viskosität und k^r die relative Permeabilität. Ein typisches Beispiel ist $k_w^r(s) = s^2$ und $k_o^r(s) = (1-s)^2$, was auf

$$f(s) = \frac{s^2}{s^2 + \frac{\mu_w}{\mu_o}(1-s)^2} \tag{2}$$

führt. Abbildung 1.3 in (L1) zeigt die Lösung zu drei verschiedenen Zeitpunkten. Hierbei ist die Anfangsverteilung $s(x,0) = 0$ und eine Randbedingung $s(0,t) = 1$, d.h. reines Wasser wird am linken Rand hineingepumpt. Man beachte die fortschreitende Unstetigkeit.
Ist der Fluß f konvex, so ist die Lösung eines Riemann-Problems stets entweder ein Schock oder eine Verdünnungswelle. Falls f *nicht konvex* ist, kann die Entropielösung beides beinhalten. Ein typisches Beispiel hierfür ist die gerade Buckley-Leverett-Gleichung. Abbildung 4.6 in (L1) zeigt den Fluß $f(s)$ für den Fall $\mu_o = 2\mu_w$. Wir betrachten ein *Riemann-Problem* mit Anfangszuständen $s_l = 1$ und $s_r = 0$, was die Strömung von reinem Wasser $s = 1$ zu reinem Öl $s = 0$ modelliert. Mit Hilfe der Charakteristikenmethode kann man nun eine drei-wertige Lösung konstruieren, die in Abbildung 4.7a in (L1) dargestellt ist. Hierbei sind die charakteristischen Geschwindigkeiten durch $f'(s)$ gegeben, so daß das Profil der Ausbuchtung in dieser Abbildung der Graph von $tf'(s)$ (auf der Seite) ist.

Wir können nun die *Gebietsregel* benutzen, um diese drei-wertige Lösung durch einen korrekten Schock zu ersetzen. Die resultierende schwache Lösung sieht man in Abbildung 4.7b und die zugehörigen Charakteristiken in Abbildung 4.7c.

Aufgabe

Leiten Sie mit Hilfe der Gebietsregel einen Ausdruck für die Schockposition als Funktion von t her und überprüfen Sie, daß die Rankine–Hugoniot–Bedingung stets erfüllt ist.

Physikalische Interpretation der Lösung aus Abbildung 4.7: das Wasser verdrängt einen gewissen Anteil s^* des Öls unmittelbar. Hinter dem Schock gibt es eine Mischung von Öl und Wasser, mit geringer werdenden Ölanteil bei fortschreitender Zeit. An einem Produktions-Bohrloch (sagen wir am Punkt $x = 1$) erhält man reines Öl bis der Schock ankommt, danach folgt eine Mischung aus Öl und Wasser mit abnehmender Ausbeute. Mit dieser Technik ist es unmöglich, das gesamte Öl in endlicher Zeit zu gewinnen.
Beachten Sie, daß die Riemann–Lösung sowohl einen Schock als auch eine Verdünnungswelle enthält. Besitzt $f(s)$ mehrere Wendepunkte, so kann die Lösung auch mehrere Schocks und Verdünnungswellen haben.

Aufgabe

Erklären Sie, warum es keine Riemann–Lösung mit einem Schock und einer Verdünnungswelle gleichzeitig geben kann, wenn der Fluß f konvex oder konkav ist.

Es stellt sich heraus, daß man die Lösung des Riemann–Problems auf einfache Art und Weise vom Graph von f bestimmen kann. Ist $s_r < s_l$, so konstruiert man die *konvexe Hülle* der Menge $\{(x, y) : s_r \leq x \leq s_l \text{ und } y \leq f(x)\}$. Die konvexe Hülle ist die kleinste konvexe Menge, die die ursprüngliche Menge enthält. Dies ist in Abbildung 4.8 in (L1) im Fall $s_l = 1$, $s_r = 0$ gezeigt.
Betrachtet man den oberen Rand dieser Menge, so sieht man daß sie aus einem Geradenstück von $(0, 0)$ bis $(s^*, f(s^*))$ besteht und dann $y = f(x)$ bis zum Punkt $(1, 1)$ folgt. Der Tangentialpunkt s^* ist genau der Wert hinter dem Schock. Die Gerade repräsentiert einen Schock, der von $s = 0$ nach $s = s^*$ springt und der Abschnitt, wo der Rand $f(x)$ folgt, ist die Verdünnungswelle. Dies funktioniert allgemein für zwei Zustände (vorausgesetzt $s_l > s_r$) und jedes f.
Beachten Sie, daß die Steigung dieses Geradenstücks $c^* = [f(s^*) - f(s_r)]/[s^* - s_r]$ genau die Schockgeschwindigkeit ist. Die Tatsache, daß diese Gerade tangential zur Kurve $f(x)$ bei s^* ist bedeutet $c^* = f'(s^*)$, d.h. der Schock bewegt sich mit der gleichen Geschwindigkeit wie die Charakteristiken in der Ecke von diesem Verdünnungsfächer (siehe Abbildung 4.7c).
Ist der Schock mit einem Punkt $\hat{s} < s^*$ verbunden, dann wäre die Schockgeschwindigkeit $[f(\hat{s}) - f(s_r)]/[\hat{s} - s_r]$ kleiner als $f'(\hat{s})$ und würde zu einer drei-wertigen Lösung führen. Auf der anderen Seite, wenn der Schock mit einem Punkt oberhalb von s^* verbunden wäre, würde die 2. Version der Entropiebedingung verletzt sein. Dies erklärt die Tangentialbedingung, die sich auf natürliche Weise aus der Konstruktion der konvexen Hülle ergibt.

Aufgabe

Zeigen Sie, daß die *2. Version der Entropiebedingung*

$$\frac{f(s) - f(s_l)}{s - s_l} \geq c \geq \frac{f(s) - f(s_r)}{s - s_r} \quad \text{für alle } s \text{ zwischen } s_l \text{ und } s_r$$

(c: Schockgeschwindigkeit) verletzt ist, wenn der Schock oberhalb von s^* verläuft.

Ist $s_l < s_r$, so funktioniert die gleiche Idee, nur muß man die konvexe Hülle der Menge von Punkten oberhalb des Graphs betrachten: $\{(x, y) : s_r \leq x \leq s_l \text{ und } y \geq f(x)\}$.
Ist f konvex, so liefert die Konstruktion der konvexen Hülle entweder ein einzelnes Geradenstück (einzelner Schock) oder die Funktion f selbst (einzelne Verdünnungswelle) falls $s_l < s_r$.

Literatur:

(BL) S.E. Buckley und M.C. Leverett, *Mechanism of fluid displacement in sands*, Trans. AIME **146** (1942), 107–116.

(L1) R.J. LeVeque, *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhäuser, 1990, Kapitel 4.2

(L2) R.J. LeVeque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, 2002, Kapitel 16

(P) D.W. Peaceman, *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*, Elsevier, 1977.