Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Wintersemester 03/04

Projektblatt *Burgers–Gleichung*
zur Vorlesung
“Theorie und Numerik hyperbolischer Erhaltungsgleichungen”

Die (viskose) Burgers–Gleichung

Die Gleichung

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}, \quad u|_{t=0} = u_0, \tag{1}$$

heißt *(viskose) Burgers–Gleichung*. Wir beschäftigen uns hauptsächlich mit der Gleichung ($\varepsilon = 0$):

$$u_t + uu_x = 0, \qquad u|_{t=0} = u_0, \tag{2}$$

und nennen sie die *nicht–viskose Burgers–Gleichung*.

Charakteristikenverfahren und Lösungsbegriff

Mit dem Ansatz $u(x(s), t(s)) \equiv$ konst. ergibt sich für (x, t) aus $\dot{t}u_t + \dot{x}u_x = 0$ und der nicht–viskosen Burgers–Gleichung das DGL–System

$$\begin{aligned} \dot{t} &= 1, \\ \dot{x} &= u(x,t) = \text{konst.} \end{aligned} \tag{3}$$

Damit ist die Lösung u auf der Geraden $(x, t) = (x_0 + tu_0(x_0), t)$ konstant mit $u(x, t) \equiv u_0(x_0)$.

Damit lassen sich für unstetige u_0 auch unstetige “Lösungen” finden. Was wollen wir unter “Lösung” verstehen? Wir verwenden einen sog. “schwachen Lösungsbegriff”:

Schwache Lösung

Eine Funktion u heißt *(schwache) Lösung* der nicht–viskosen Burgers–Gleichung, wenn

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(u\varphi_t + \tfrac{1}{2}u^2\varphi_x\right) dxdt + \int_{\mathbb{R}} u_0\varphi|_{t=0}\, dx = 0 \tag{4}$$

für alle $\varphi \in C_0^1([0, \infty) \times \mathbb{R})$.

Aufgabe

Betrachten Sie das *skalare Cauchyproblem* (2) mit glatten Anfangsdaten $u_0(x)$. Zeigen Sie, daß sich die von den zwei Punkten $x_1 < x_2$ ausgehenden *Charakteristiken* zum Zeitpunkt

$$T = \frac{x_2 - x_1}{u_0(x_1) - u_0(x_2)}$$

schneiden und folgern Sie daraus, daß das Problem (2) genau dann eine *klassische Lösung* besitzt, wenn $u_0(x)$ monoton steigend in x ist.
Gelte nun für die Anfangsbedingung $u_0'(\xi) < 0$. Zeigen Sie, daß sich die von einer Umgebung von ξ ausgehenden Charakteristiken spätestens zum Zeitpunkt

$$T = -\frac{1}{u_0'(\xi)}$$

kreuzen und schließen Sie daraus, daß das Cauchyproblem (2) mit stetig differenzierbaren Anfangsdaten u_0 eine auf das Zeitintervall $t \in [0, T]$ eingeschränkte Lösung besitzt mit

$$T = -\frac{1}{\min_{x\in\mathbb{R}} u_0'(x)}$$

gilt. Verallgemeinern Sie diese Aussage für allgemeine skalare Erhalungsgleichungen $u_t + f(u)_x = 0$. Warum gibt es im linearen Fall ($f(u)_x = au_x$) immer eine klassische Lösung?

Schocks und Energieerhaltung

Beispiel 1 (aus der Vorlesung)
Betrachte

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & & x < -1 \\ -x & \text{für} & -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & & x > 0 \end{cases} . \tag{5}$$

Problem: Die nicht–viskose Burgers–Gleichung besitzt nur für $t < 1$ eine durch das Charakteristikenverfahren gegebene Lösung. Dann kreuzen sich Charakteristiken und es ist nicht mehr klar, welche Werte eine Lösung nun annehmen soll. Jedenfalls werden sich Unstetigkeiten in der Lösung wohl nicht vermeiden lassen.

Unstetigkeiten in der Lösung nennen wir *Schocks*. Um Eigenschaften dieser Schocks zu finden, betrachten wir weitere Eigenschaften der nicht–viskosen Burgers–Gleichung.

Aus der Gleichung ergibt sich für C^1–Lösungen u durch Integration $\int_{x_1}^{x_2} \ldots\, dx$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)\, dx + \frac{1}{2}\Big(u(x_2,t)^2 - u(x_1,t)^2\Big) = 0. \tag{6}$$

Für $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0$ gilt damit insbesondere

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\, dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\, dx \qquad \text{für alle } t \geq 0. \tag{7}$$

Daher nennen wir die nicht–viskose Burgers–Gleichung auch eine *Erhaltungsgleichung*. Wir fordern nun auch von unstetigen Lösungen, daß sie die Gleichung (6) erfüllen.

Sei u eine Lösung mit Schock. Beschreibe weiter $x_s(t)$ die *Position des Schocks*. Sei $u_l(t) := \lim_{\varepsilon\to 0} u(x_s - \varepsilon, t)$ und $u_r(t) := \lim_{\varepsilon\to 0} u(x_s + \varepsilon, t)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} u \, dx + \frac{1}{2}\Big(u(x_2)^2 - u(x_1)^2\Big) \\ &= \int_{x_1}^{x_s(t)} u_t \, dx + \dot{x_s} u_l + \int_{x_s(t)}^{x_2} u_t \, dx - \dot{x_s} u_r + \frac{1}{2}\Big(u(x_2)^2 - u(x_1)^2\Big) \\ &= \dot{x_s}\big(u_l - u_r\big) - \tfrac{1}{2}\left(u_l^2 - u_r^2\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Es ergibt sich also eine Bedingung an die Geschwindigkeit des Schocks.

Sprungbedingung oder Rankine-Hugoniot-Bedingung

Für die Geschwindigkeit eines Schocks gelte

$$\dot{x}_s = \tfrac{1}{2}\left(u_l + u_r\right). \tag{9}$$

Beipiel 1 — Fortsetzung
In unserem Beispiel ist $\dot{x}_s = \frac{1}{2}$.
Wir beobachten: In jedem Punkt des Schocks treffen sich zwei Charakteristiken. Von jeder Seite des Schocks kommt eine. Man kann ihnen (in die Vergangenheit) bis zu den Anfangswerten folgen.

Aufgabe

Lösen Sie die Burgers Gleichung (2) mit den Anfangsdaten

$$u_0(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 1, & 0 < x < 2 \\ 0, & x > 2. \end{cases} \tag{10}$$

Skizzieren Sie die Charakteristiken und Schocklinien in der $x-t$-Ebene.
Hinweis: Die beiden Schocks laufen in einem Punkt zu einem einzigen Schock zusammen.

Verdünnungswellen und die Entropiebedingung

Beispiel 2
Betrachte

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}. \tag{11}$$

Nun haben wir einen ganzen Kegel, in dem wir die Lösung noch nicht kennen. Betrachten wir für ein beliebiges $\alpha \in (0,1)$ die Funktion

$$u_\alpha(x,t) = \begin{cases} 0, & x < \alpha\frac{t}{2} \\ \alpha, & \alpha\frac{t}{2} < x < (1+\alpha)\frac{t}{2} \\ 1, & x > (1+\alpha)\frac{t}{2} \end{cases}. \tag{12}$$

Jede dieser Funktionen u_α genügt der Sprungbedingung, d.h. wir haben noch immer nicht genug Regeln, um eine eindeutige Lösung festzulegen.
Wir beobachten die Schocks von u_α: In jedem Punkt der Schocks treffen sich zwei Charakteristiken. Von jeder Seite der Schocks kommt eine. Wenn man ihnen folgt, gelangt man in die Zukunft. Um ein u_α eindeutig festzulegen müßte man Bedingungen an die Werte in einer Zukunft $t > 1$ stellen.

Im ersten Beispiel wurde der Schock durch die Anfangswerte festgelegt. Im zweiten Beispiel sind die Schocks durch zukünftige Werte festgelegt. Das ist mit unseren Vorstellungen von Kausalität nicht recht vereinbar. Daher fordern wir von der Lösung, daß sie eine weitere Bedingung erfüllen soll, die so etwas ausschließt.

Entropiebedingung

Für jeden Schock gelte, daß man den sich in ihm treffenden Charakteristiken bis zu den Anfangswerten folgen kann. Formal:

$$u_l > \dot{x}_s > u_r. \tag{13}$$

Beispiel 2 — Fortsetzung
Die Lösung ist im Kegel $K = \{(x,t) : 0 < x < t\}$ noch unbekannt. Weil die Werte links von K kleiner sind als rechts von K, kann (wegen der Entropiebedingung) in dem Kegel kein Schock auftreten, d.h. die Lösung muß dort stetig sein. Der Punkt $(x = 0, t = 0)$ ist der einzig mögliche Unstetigkeitspunkt, d.h, der einzige Punkt, in dem sich Charakteristiken treffen dürfen. Also gibt es nun eine eindeutige Lösung:

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, x < 0 & \\ x/t, & 0 \leq x \leq t \\ 1, & x > t \end{cases} . \tag{14}$$

Eindeutige Lösung

Wir können nun beschreiben, was wir als Lösung u_{SE} der nicht–viskosen Burgers-Gleichung akzeptieren. Nämlich eine mit dem Charakteristikenverfahren gewonnene Lösung, deren Charakteristiken sich nur in Schocks treffen dürfen, die der Sprungbedingung genügen. Die Schocks müssen dabei der Entropiebedingung genügen.
Die so beschriebene Lösung ist eindeutig.

Lösung durch Grenzübergang

Die Gleichung

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}, \qquad u|_{t=0} = u_0 \tag{15}$$

ist für $\varepsilon > 0$ eindeutig lösbar und hat glatte Lösungen für $t > 0$.

Viskositätslösung

Eine Viskositätslösung u_V der nicht–viskosen Burgers–Gleichung ist der Grenzwert der Lösungen u^ε der Burgers–Gleichung für $\varepsilon \to 0$: $u_V = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} u^\varepsilon$.

Eigentlich müßten wir unbedingt klären, in welchen Räumen wir diese Lösungen betrachten wollen, weil ein Limes nur durch die zugehörigen Normen definiert sein kann. Außerdem müßten wir zeigen, daß der Grenzwert überhaupt existiert. Das lassen wir hier aber alles bleiben.
Wir untersuchen aber, was sich über die Schocks von u_V sagen läßt. Dazu betrachten wir (wieder nur) ein Beispiel:

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l, & x < 0 \\ u_r, & x > 0 \end{cases}. \tag{16}$$

Falls die Lösung u_V in $x_s(t)$ einen Schock hat, dann hat die Lösung u^ε dort eine sog. *Grenzschicht*. Mit der Grenzschichtvariablen

$$\xi = \frac{x - x_s(t)}{\varepsilon^\alpha} \tag{17}$$

ergibt sich $u_t = v_t - \varepsilon^{-\alpha}\dot{x}_s v_\xi$ und

$$0 = u_t + uu_x - \varepsilon u_{xx} = v_t - \varepsilon^{-\alpha}\dot{x}_s v_\xi + \varepsilon^{-\alpha} v v_\xi - \varepsilon^{1-2\alpha} v_{\xi\xi}. \tag{18}$$

Mit $\alpha = 1$ und $\varepsilon = 0$ ergibt sich die Gleichung

$$v_{\xi\xi} = \left(\tfrac{1}{2}v^2\right)_\xi - \dot{x}_s v_\xi \qquad \text{bzw.} \qquad v_\xi = \tfrac{1}{2}v^2 - \dot{x}_s v + c. \tag{19}$$

Als "Randbedingungen" stellen sich

$$\lim_{\xi\to-\infty} v = u_l, \qquad \lim_{\xi\to\infty} v = u_r \qquad \text{und} \qquad \lim_{\xi\to\pm\infty} v' = 0. \tag{20}$$

Die letzte Randbedingung führt zu einem linearen Gleichungssystem für $\dot{x}_s$ und c und liefert

$$\dot{x}_s = \tfrac{1}{2}\,(u_l + u_r) \qquad \text{und} \qquad c = \tfrac{1}{2}\,u_l u_r. \tag{21}$$

Damit ist

$$v_\xi = \tfrac{1}{2}(v - u_l)(v - u_r). \tag{22}$$

Eine Betrachtung des Phasenbildes (v, v_ξ) zeigt, daß die ersten beiden Randbedingungen nur für $u_l > u_r$ erfüllbar sind. Also treten für $u_l < u_r$ keine Grenzschichten, und damit keine Schocks auf.

Damit haben wir gezeigt, daß die Viskositätslösung u_V die Sprungbedingung und die Entropiebedingung erfüllt.

Sei u_V glatt um (x_0, t_0) und $u_0 := u(x_0, t_0)$. Dann ist

$$\frac{\partial}{\partial s} u^\varepsilon(x_0 + u_0 s, t_0 + s)\bigg|_{s=0} = \varepsilon {u^\varepsilon}_{xx}(x_0, t_0) \tag{23}$$

und $u^\varepsilon_{xx}(x_0, t_0)$ ist gleichmäßig beschränkt für alle ε.
Also ist $\frac{\partial}{\partial s} u_V(x_0 + u_0 s, t_0 + s)\big|_{s=0} = 0$, d.h. die Charakteristiken von u_V sind die von u_{SE}.
Damit ist $u_V = u_{SE}$.

Aufgabe

Zeigen Sie, daß die *viskose Gleichung* (1) fortschreitende Wellenlösungen der Form $u^\varepsilon(x,t) = w(x - st)$ besitzt indem Sie eine DGL für w herleiten und überprüfen, daß diese DGL Lösungen der Form

$$w(y) = u_r + \frac{1}{2}(u_l - u_r)[1 - \tanh((u_l - u_r)y/2\varepsilon)]$$

mit $s = \frac{1}{2}(u_l + u_r)$ hat. Beachten Sie, daß $w(y) \to u_l$ für $y \to -\infty$ und $w(y) \to u_r$ für $y \to \infty$. Skizzieren Sie diese Lösung und untersuchen Sie daran den Grenzprozeß $\varepsilon \to 0$.

Lösung der Burgers-Gleichung: Die Cole–Hopf–Transformation

Eine Lösung der Burgers–Gleichung läßt sich auf folgende Weise beschreiben: Sei φ_0 eine Stammfunktion von u_0. Sei v die Lösung von

$$v_t = \varepsilon v_{xx}, \qquad v|_{t=0} = v_0 := \exp\left(-\frac{\varphi_0}{2\varepsilon}\right). \tag{24}$$

Eine "explizite" Beschreibung von v ist

$$v(x,t) = (4\pi\varepsilon^2 t)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\varepsilon^2 t}\right) v_0(y)\, dy. \tag{25}$$

Dann genügt $\varphi = -2\varepsilon \ln v$ der Gleichung

$$\varphi_t + \tfrac{1}{2}\varphi_x^2 = \varepsilon \varphi_{xx}, \qquad \varphi|_{t=0} = \varphi_0, \tag{26}$$

und $u = \varphi_x$ löst die Burgers–Gleichung. (Die Substitution $u = -2\varepsilon \frac{v_x}{v}$ heißt *Cole–Hopf–Transformation*.)

Bemerkungen

• Noch ein Beispiel: Sei

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}. \tag{27}$$

Dann ist

$$u(x,t) = \begin{cases} \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{t}, & 0 < x < t \\ 1, & t < x < 1 + \frac{t}{2} \\ 0, & x > 1 + \frac{t}{2} \end{cases}, & 0 < t \le 2 \\ \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{t}, & 0 < x < \sqrt{2t} \\ 0, & x > \sqrt{2t} \end{cases}, & t > 2 \end{cases}. \tag{28}$$

• Es gibt einige weitere Formulierungen der Entropiebedingung und andere Definitionen von Viskositätslösungen.

• Die Methoden, die wir zur Lösung der reduzierten Burgers–Gleichung angewendet haben, lassen sich auch auf andere Erhaltungsgleichungen der Form

$$u_t + (f(u))_x = 0, \qquad u|_{t=0} = u_0. \tag{29}$$

mit $f''(u) > 0$ für alle u (bzw. f strikt konvex) anwenden. Als Sprungbedingung ergibt sich dann

$$\dot{x}_s = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} \tag{30}$$

und die Entropiebedingung wird zu

$$f'(u_l) > \dot{x}_s > f'(u_r). \tag{31}$$

(Wegen der Konvexität von f folgt daraus $u_l > u_r$.)

• In numerischen Methoden werden Zeit- und Ortsschrittweiten Δt und Δx gewählt und $u(j\Delta x, k\Delta t)$ wird durch u_j^k approximiert. Hier soll nur angemerkt werden, daß das naive Diskretisierungsschema

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t} + \frac{f(u_{j+1}^k) - f(u_{j-1}^k)}{2\Delta x} = 0, \qquad u_j^0 = u_0(j\Delta x), \tag{32}$$

zur näherungsweisen Lösung von $u_t + (f(u))_x = 0$ nicht geeignet ist. Stattdessen kann man (zum Beispiel) sog. *Upwind-Verfahren* verwenden:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t} = -\frac{1}{\Delta x} \begin{cases} f(u_j^k) - f(u_{j-1}^k), & f'(u_j^k) \ge 0 \\ f(u_{j+1}^k) - f(u_j^k), & f'(u_j^k) \le 0 \end{cases}. \tag{33}$$

Oder man führt eine *künstliche Viskosität* εu_{xx} ein:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t} + \frac{f(u_{j+1}^k) - f(u_{j-1}^k)}{2\Delta x} = \varepsilon \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{\Delta x^2}. \tag{34}$$

Konservative Verfahren: Konsistenz

Zeigen Sie, daß das *modifizierte Upwind-Schema*

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h} U_j^n (U_j^n - U_{j-1}^n)$$

zum Lösen der Burgers–Gleichung in der quasilinearen Form

$$u_t + u u_x = 0$$

(unter der Annahme $u(x,t) \geq 0$ für alle x, t) konsistent ist zu den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} u_t + \big(\frac{1}{2}u^2\big)_x &= 0, \\ (u^2)_t + \big(\frac{2}{3}u^3\big)_x &= 0, \end{aligned}$$

die jedoch andere Schockgeschwindigkeiten besitzen.

Literatur:

(L) R.J. LeVeque, *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhäuser, 1990, Kapitel 3.2

(W) G. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley-Interscience, 1974, Kapitel 4.