Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Wintersemester 03/04

9. Übungsblatt zur Vorlesung
"Theorie und Numerik hyperbolischer Erhaltungsgleichungen"

(Konvergenz skalarer Verfahren: Stabilität, ℓ^1–Kontraktion)

1. Aufgabe (6 Punkte)

Zeigen Sie die Identität

$$\|U\|_1 = \|\tilde{u}\|_1,$$

wobei $U = \{U_j\} \in \ell^1$ eine Gitterfunktion sei mit

$$\|U\|_1 = h \sum_{j=-\infty}^{\infty} |U_j|\,, \qquad \ell^1 = \{U : \|U\|_1 < \infty\},$$

und die *Erweiterung* von U zu einer stückweisen konstanten Funktion $\tilde{u}(x) = U_j$ für $x_{j-1/2} \leq x < x_{j+1/2}$ ist. Überprüfen Sie ferner, daß

$$\|U\|_1 \leq \|u\|_1$$

gilt, falls man andererseits $u(x)$ auf eine Gitterfunktion U durch Bildung des *Zellenmittels*

$$U_j := \bar{u}_j \equiv \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x)\, dx$$

beschränkt.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Zeigen Sie, daß das *Lax-Friedrichs–Schema*

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}\big(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n\big) - \frac{k}{2h}\big(f(U_{j+1}^n) - f(U_{j-1}^n)\big)$$

ℓ^1*-kontrahierend* ist, falls die CFL-Bedingung $|kf'(u)/h| \leq 1$ für alle u im Bereich $\min_j(U_j^n, V_j^n) \leq u \leq \max_j(U_j^n, V_j^n)$ erfüllt ist.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 13.01. **vor** der Vorlesung.