

# Optimale Steuerung von partiellen Differentialgleichungen: Anspruch und Möglichkeiten aus Sicht heutiger Anwendungen

H. J. Pesch

Universität Bayreuth, [hans-josef.pesch@uni-bayreuth.de](mailto:hans-josef.pesch@uni-bayreuth.de)

Bei der numerischen Simulation komplexer dynamischer Systeme, die im Allg. durch Differentialgleichungen gegeben sind, ist deren numerische Lösung oft nur der erste Schritt. Häufig entsteht danach der Wunsch, den durch die Gleichungen beschriebenen Prozess bzgl. inhärenter Freiheitsgrade zu optimieren.

Im Vortrag konzentrieren wir uns auf Multi-Physik-Probleme, wo verschiedene Typen von Differentialgleichungen gekoppelt sind, zum Teil sogar mit anderen Gleichungen wie algebraischen Gleichungen oder Integralgleichungen. Man spricht in diesem Zusammenhang von partiell-differential-algebraischen Gleichungen. Die Optimierungsaufgaben sind dann in der Regel Optimalsteuerungsaufgaben mit Nebenbedingungen in Form partieller Gleichungen oder eben diesen partiell-differential-algebraischen Gleichungen.

Zur Motivation werden zunächst drei Probleme aus ingenieurwissenschaftlichen Anwendungen vorgestellt:

1. Das erste einfachste Problem beschäftigt sich mit der Vermeidung von Heißrisen beim Laserstrahlschweißen. Nach einem russischen Patent kann man das Risiko der Heißrisenbildung vermeiden, wenn man zwei zusätzliche Laserstrahlen hinter dem eigentlichen, die Schweißnaht bildenden Laserstrahl in optimaler Weise platziert und dimensioniert. Mathematisch erhält man ein semi-infinites Optimierungsproblem. Die Nebenbedingungen sind eine quasi-stationäre Wärmeleitungsgleichung und verschiedene Ungleichungsnebenbedingungen.
2. Das zweite Problem ist dann ein wirkliches Optimalsteuerungsproblem für ein gekoppeltes System aus einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen und einer quasi-linearen parabolischen Gleichung. Ziel aus Sicht der Anwendungen ist die Berechnung treibstoffminimaler Langstreckenflüge für ein Passagierflugzeug, das in der Lage ist, hypersonische Geschwindigkeiten zu erreichen. Aufgrund dieser hohen Geschwindigkeiten im Bereich der vier- und fünffachen Schallgeschwindigkeit ist die aerothermische Aufheizung des Flugzeugrumpfes ein gravierendes Problem. Die Aufheizung, beschrieben durch die genannte quasi-lineare parabolische Gleichung, muss begrenzt werden. Die Steuerung des Flugzeuges ist also so vorzunehmen, dass das Hitzeschutzschild nicht überhitzt wird.
3. Das letztes und dritte Motivationsbeispiel wird als Demonstrationsbeispiel des Vortrages dienen. Hierbei beschreibt ein hochdimensionales partial-differential-algebraische Gleichungssystem die elektrochemischen Reaktionen einer kontrollierten Knallgasreaktion und die daraus resultierende Wärmeausbreitung innerhalb einer Brennstoffzelle sowie die letztendlich entstehenden elektrischen Potentialdifferenzen, die Basis der Energieerzeugung sind. Der Gasfluss am Anodeneingang und Eingabegrößen für den katalytischen Nachbrenner sowie der Anteil des aus dem Kathodenausgang in den Brenner rückgeführten Gases können als Steuergrößen dienen, um z. B. schnelle Lastwechsel durchzuführen. Der Typ der Brennstoffzelle (Schmelzkarbonatbrennstoffzelle) kann durchaus als Paradebeispiel einer umweltfreundlichen Energieproduktion dienen, da seine hohe Prozesstemperatur eine interne Produktion des benötigten Wasserstoffs aus methanhaltigen Gasen erlaubt, aber zu starke Temperaturschwankungen müssen dabei vermieden werden, um Materialkorrosionen vorzubeugen.

Nach diesen Motivationsbeispielen werden die wesentlichen Ideen aus der Theorie Optimaler Steuerungen mit partiellen Differentialgleichungen anhand der "Mutter aller Optimalsteuerungsprobleme mit partiellen Gleichungen" vorgestellt, insbesondere die Herleitung notwendiger Bedingungen. Dabei wird aufgezeigt, wie man die riesige Lücke zwischen solchen Textbuchbeispielen und den Herausforderungen von Multi-Physik-Problemen überbrücken kann.

Danach werden die wesentlichen beiden numerischen Lösungsansätze *first optimize then discretize* und *first discretize then optimize* erst auf relativ abstraktem Niveau diskutiert und schließlich anhand des Brennstoffzellenproblems auf ihre Umsetzbarkeit bei realistischen Anwendungsproblemen und ihre Vor- und Nachteile getestet.