

2. Übungsblatt zur Vorlesung “Modellierung mit Differentialgleichungen” (Regulär und singular gestörte Probleme)

1. Aufgabe:

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Anfangswertprobleme *regulär* bzw. *singular* gestört? Berechnen Sie ggf. die asymptotischen Entwicklungen (und lesen Sie daraus die exakte Lösung ab).

$$(a) \quad \varepsilon y' + y = x, \quad x > 0, \quad y(0) = \alpha;$$

$$(b) \quad y' + \varepsilon y = x, \quad x > 0, \quad y(0) = \alpha;$$

$$(c) \quad y' + y = \varepsilon x, \quad x > 0, \quad y(0) = \alpha.$$

2. Aufgabe:

Betrachten Sie die Gleichung

$$y' + y = \varepsilon y^2, \quad x > 0, \quad y(0) = 1.$$

Bestimmen Sie die exakte Lösung y und die ersten drei Terme y_k , ($k = 0, 1, 2$) einer asymptotischen Entwicklung der Lösung. Vergleichen Sie y und $\sum_{k=0}^2 y_k \varepsilon^k$ mittels einer Reihendarstellung von y . Wie groß ist der Gültigkeitsbereich der Reihendarstellung?

3. Aufgabe:

Betrachten Sie die *Duffingsche Gleichung*

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0, \quad u(0) = a, \quad \dot{u}(0) = 0.$$

(Die Duffing-DGL $\ddot{u} + \alpha u + \beta u^3 = 0$ beschreibt u.a. die Bewegungsgleichung eines ungedämpften Federpendels mit kubisch von der Auslenkung abhängiger Rückstellkraft.)

Bestimmen Sie die ersten zwei Terme einer asymptotischen Entwicklung der Lösung.

(Hinweis: $\cos^3 t = (\cos 3t + 3 \cos t)/4$)

Wie verhält sich die Entwicklung für $t \rightarrow \infty$?

Zeigen Sie durch Multiplikation der Gleichung mit \dot{u} und Integration über $[0, T]$ (für $T \in \mathbb{R}$ beliebig), daß die exakte Lösung der Gleichung gleichmäßig beschränkt ist.