Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Wintersemester 2001/2002

12. Übungsblatt zur Vorlesung "Numerik partieller Differentialgleichungen"

(Lineare Finite Elemente, Transformationsformel, inverse Ungleichung)

1. Aufgabe (3 Punkte (0.5+1+0.5+1))

Das Dreieck T sei durch die Eckpunkte (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$ gegeben. Die zugehörigen *linearen Basisfunktionen* sind durch $b_j(x_k, y_k) = \delta_{jk},\ j, k = 1, 2, 3$ bestimmt.
Zeigen Sie:

a)
$$b_j(x,y) = \det \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{j+1} & y_{j+1} \\ 1 & x_{j+2} & y_{j+2} \end{pmatrix} \Big/ \det \begin{pmatrix} 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_{j+1} & y_{j+1} \\ 1 & x_{j+2} & y_{j+2} \end{pmatrix},$$
wobei Indizes modulo 3 zu verstehen sind.

b) Es gilt
$$\nabla b_j(x,y) = \frac{1}{2\,|T|} \begin{pmatrix} y_{j+1} - y_{j+2} \\ x_{j+2} - x_{j+1} \end{pmatrix},$$
wobei $|T|$ den Flächeninhalt von T bezeichnet.

c) Für die Einträge in die *lokale Elementmatrix* $A_T = (a_{jk})_{j,k=1,2,3}$ gilt
$$a_{jk} = \int_T \nabla b_j (\nabla b_k)^\top\, dx = \frac{|T|}{(2\,|T|)^2} \begin{pmatrix} y_{j+1} - y_{j+2}, & x_{j+2} - x_{j+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{k+1} - y_{k+2} \\ x_{k+2} - x_{k+1} \end{pmatrix}.$$

d) Die lokale Elementmatrix ist gegeben durch
$$A_T = |T|\ GG^\top$$
mit
$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Aufgabe (4 Punkte (1+3))

Sei $\widetilde{T}$ das Einheitsdreieck und $T_j \in \tau$ gegeben durch die Eckpunkte $X_i = (x_i, y_i), i = 1, 2, 3$. In der Vorlesung wurde gezeigt, daß $F_{T_j} : \widetilde{T} \to T_j,\ F_{T_j}(\tilde{x}) = B\tilde{x} + b$, $\widetilde{T}$ auf T_j abbildet.

a) Berechnen Sie $\det F'_{T_j}(\tilde{x})$.

b) Sei B regulär und $v \in H^2(T_j)$. Zeigen Sie, daß dann $\hat{v} := v \circ F_{T_j} \in H^2(\widetilde{T})$ gilt und eine Konstante $c > 0$ existiert mit
$$|\hat{v}|_{H^2(\widetilde{T})} \leq c\,\|B\|^2\,|\det B|^{-\frac{1}{2}}\,|v|_{H^2(T_j)}.$$

3. Aufgabe (3 Punkte)

Es sei V_h der Raum der linearen finiten Elemente über einer *quasi–uniformen* Triangulierung τ eines polygonalen Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.
Zeigen Sie: Unter der Voraussetzung $h/h_{T_j} \leq \nu$ für alle $T_j \in \tau$, gilt die *inverse Ungleichung*

$$\|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{C}{h} \|v_h\|_{L^2(\Omega)}$$

Sie dürfen dabei benutzen, daß

$$\|v_h\|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{60} \sum_{T_j \in \tau} \Big(3 \sum_i v^2_{i,T_j} + 8 \sum_{i<k} v^2_{ik,T_j} + 27 v^2_{s,T_j} \Big) |T_j|$$

gilt. Dabei sind v_{i,T_j} die Funktionswerte der linearen Funktion $v_h|_{T_j}$ in den Ecken, v_{ik,T_j} die Funktionswerte in den Seitenmittelpunkten und v_{s,T_j} der Wert im Schwerpunkt.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 29.01. **vor** der Vorlesung.