Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Wintersemester 2001/2002

4. Übungsblatt zur Vorlesung "Numerik partieller Differentialgleichungen"

(Tridiagonalmatrizen, Diskretes Maximumprinzip, ℓ^∞–Stabilität)

1. Aufgabe (2 Punkte)

Zeigen Sie, daß die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der *Tridiagonalmatrix*

$$T = \mathrm{tridiag}(a,b,c) = \begin{pmatrix} b & c & 0 & \dots & 0 \\ a & b & c & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & a & b & c \\ 0 & \dots & 0 & a & b \end{pmatrix}_{N\times N}$$

gegeben sind durch

$$\lambda_j = b + 2c\sqrt{\frac{a}{c}}\cos\frac{j\pi}{N+1}$$

und $u_j = (u_1,\dots,u_k,\dots,u_N)^\top$ mit

$$u_k = 2\left(\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^k \sin\frac{kj\pi}{N+1}, \qquad k=1,\dots,N, \quad j=1,\dots,N.$$

2. Aufgabe (3 Punkte (1.5+1.5))

Beweisen Sie die Folgerungen 1 und 2 in Kapitel 2.5 der Vorlesung.

3. Aufgabe (5 Punkte (2.5+2.5))

Wir betrachten ein finites Differenzenverfahren für die *Konvektions–Diffusionsgleichung*

$$\begin{aligned} u_t &= au_{xx} - bu_x, \qquad 0<x<1, \quad t>0 \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0, \end{aligned}$$

wobei $a>0$. Der Einfachheit halber nehmen wir $b>0$ an.
Schreiben Sie das Schema $D_t^+u_j^n = aD_x^2u_j^n - bD_x^0u_j^n$, $j=1,\dots,J-1$, in der Form

$$u_j^{n+1} = (1-2a\gamma)u_j^n + a\gamma(1-P_e)u_{j+1}^n + a\gamma(1+P_e)u_{j-1}^n, \qquad P_e = \frac{bh}{2a}$$

und beweisen Sie, daß für das Schema gilt

$$P_e \le 1 \implies \max_{0\le j\le J}|u_j^{n+1}| \le \max_{0\le j\le J}|u_j^n|$$

(vorausgesetzt die ℓ^2–Stabilitätsbedingung $a\gamma \le 1/2$ für $\gamma := k/h^2$ ist erfüllt).
Geben Sie ein Beispiel dafür an, daß die obige Maximumnormabschätzung für $P_e > 1$ im allgemeinen nicht mehr gilt.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 20.11. **vor** der Vorlesung.