Universität des Saarlandes
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt

Wintersemester 2000/2001

10. Übungsblatt zur Vorlesung "Praktische Mathematik"

(QR–Algorithmus, Singulärwertzerlegung)

1. Aufgabe (3 Punkte (1.5+1.5))

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix.

a) In welchem Zusammenhang stehen beim *QR–Algorithmus*

$$A_0 := A\,, \quad A_k = Q_k R_k\,, \quad A_{k+1} = R_k Q_k\,, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

die Eigenvektoren der A_k zu denen von A?

b) Zeigen Sie, daß der QR–Algorithmus die Hessenbergstruktur einer Matrix erhält.

2. Aufgabe (2 Punkte (0.5+1.5))

Von der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

soll der mittlere Eigenwert und ein dazugehöriger Eigenvektor näherungsweise bestimmt werden.

a) Schätzen Sie die Lage der Eigenwerte mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin ab.

b) Bestimmen Sie einen Eigenvektor zum mittleren Eigenwert durch 2 Schritte einer geeigneten Vektoriteration, ausgehend vom Startwert $(1,0,0)^\top$, und eine Näherung an den gesuchten Eigenwert mit Hilfe des *Rayleigh–Quotienten*

$$R[x_1] = \frac{x_1^\top x_2}{x_1^\top x_1}.$$

3. Aufgabe (2 Punkte)

Berechnen Sie eine Singulärwertzerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 5 & -10 \\ 2 & -11 & 10 \end{pmatrix}.$$

Tip: Die Ergebnisse können mit Scilab (Aufruf: '[U,Sigma,V]=svd(A)') geprüft werden.

4. Aufgabe (3 Punkte (1+2))

Ein Iterationsverfahren zur Bestimmung einer Minimum–Norm–Lösung von $Ax = b$ mit $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^k$, $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$ ist das *Landweberverfahren*

$$x_0 := 0\,, \quad x_{m+1} := x_m + \beta\, A^\top (b - Ax_m)\,, \quad \beta \in \mathbb{R}\,.$$

a) Zeigen Sie:

$$x_m = \beta \sum_{j=0}^{m-1} (I - \beta A^\top A)^j A^\top b \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}\,.$$

b) Bestimmen Sie eine Funktion $F(m, \sigma)$, so daß gilt:

$$x_m = \sum_{\sigma_\ell > 0} F(m, \sigma_\ell)\, \sigma_\ell^{-1}\, b^\top u_\ell\, v_\ell\,.$$

5. Aufgabe (Praktische Aufgabe) (5 Punkte)

Schreiben Sie ein Programm, das mit Hilfe des QR–Algorithmus die Eigenwerte einer reellen symmetrischen $n \times n$–Matrix berechnet.
Eine Routine soll die Matrix mittels Householder–Reflexionen auf Tridiagonalgestalt transformieren. Wenden Sie auf diese Tridiagonalmatrix das QR–Verfahren an. Die notwendigen QR–Zerlegungen sollen mittels geeigneten Givens–Rotationen durchgeführt werden. Das Verfahren soll abbrechen, sobald die Nebendiagonalelemente der Iterierten kleiner als 10^{-6} sind.
Testen Sie Ihr Programm an der Matrix aus der 2. Aufgabe vom 9. Übungsblatt.
Berechnen Sie mit Ihrem Programm die Eigenwerte der *Hilbertmatrix* $A = (a_{ij})$ mit

$$a_{ij} = \frac{1}{i + j - 1}\,, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

für $n = 5, 10, 15, 20, 25, 30$.

Hinweis:

> Die Benutzer von Scilab können ihre Resultate mit denjenigen vergleichen, die die Eigenwertroutine von Scilab (Aufruf: 'spec(A)') liefert. Außerdem kann die Scilab–Routine für die Berechnung der Givens–Rotationen ('givens') verwendet werden.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 16.1.01 vor der Vorlesung.
Abgabe der Lösungen zu der praktischen Aufgabe am Di, 23.1.01 in den Sprechstunden.