Universität des Saarlandes
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt

Wintersemester 2000/2001

14. Übungsblatt zur Vorlesung "Praktische Mathematik"

(tridiagonale Gleichungssysteme, B–Splines)

1. Aufgabe (1.5 Punkte)

Bei der Berechnung eines interpolierenden kubischen Splines mit natürlichen Randbedingungen ergibt sich ein symmetrisches, *tridiagonales Gleichungssystem*, vgl. Vorlesung. Zeigen Sie für den Spezialfall äquidistanter Stützstellen, daß die Systemmatrix positiv definit ist.

2. Aufgabe (3 Punkte) (1+1+1)

Bei der Diskretisierung der zweiten Ableitung einer Funktion (etwa zur Lösung eines Randwertproblems gewöhnlicher Differentialgleichungen) auf einem äquidistanten Gitter $x_j = j/n$, $j = 0, \ldots, n$ tritt die folgende *tridiagonale Matrix* auf:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$$

a) Weisen Sie nach, daß A positiv definit ist.

b) Spezialisieren Sie den Algorithmus für die Cholesky–Zerlegung auf den Fall einer tridiagonalen Matrix.

c) Geben Sie die die Cholesky–Zerlegung von A explizit an.

3. Aufgabe (2 Punkte)

Sei $\varphi^{(1)}$ der *lineare B–Spline* mit $\operatorname{supp}\varphi^{(1)} = [x_1, x_3]$ und $x_i = i - 1$, $i = 1, 2, 3$.
Zeigen Sie:

$$\varphi^{(1)}(x) = \sum_{k=0}^{2} h_k\, \varphi^{(1)}(2x - k),$$

mit $h_0 = h_2 = 1/2$ und $h_1 = 1$. Verdeutlichen Sie den Sachverhalt anhand einer Grafik.

4. Aufgabe (3.5 Punkte) (1+2.5)

Gegeben sei die Knotenmenge $\Delta = \{x_0, \ldots, x_{2^m}\} \subset [0,1]$ mit $x_k = k/2^m$, $k = 0, \ldots, 2^m$. Sei $\{\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_n^{(1)}\}$ die *B–Spline–Basis* des Raumes der linearen Splines bzgl. Δ. Zeigen Sie

a) Es ist

$$\varphi_k^{(1)}(x) = \varphi^{(1)}\big(2^m x - (k-2)\big)\ , \quad k = 2, \ldots, n-1,$$

wobei $\varphi^{(1)}$ den *linearen B–Spline* aus der 3. Aufgabe bezeichnet.

b) Es gilt die Normäquivalenz

$$\frac{2^{-m}}{6} \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2 \le \Big\| \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \, \varphi_k^{(1)} \Big\|_{L^2(0,1)}^2 \le 2^{-m} \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2\ ,$$

wobei die $\gamma_k \in \mathbb{R}$ für $k = 1, \ldots, n$ sind.
Hier bezeichnet $\|f\|_{L^2(0,1)}^2 = \int_0^1 |f(x)|^2 \, dx$ die L^2–Norm von f.
Hinweis: Zeigen Sie $\| \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \, \varphi_k^{(1)} \|_{L^2(0,1)}^2 = \langle g, Ag \rangle_{\mathbb{R}^n}$ mit $g = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^\top$ und $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, $a_{ij} = \langle \varphi_i^{(1)}, \varphi_j^{(1)} \rangle_{L^2(0,1)}$. Die Matrix A ist dann positiv definit.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 13.2.01 vor der Vorlesung.

Prof. A. Arnold / M. Ehrhardt

Proseminar aus der angewandten Mathematik im SS 2001:

"Modellierung mit Differentialgleichungen"

Anwendungsthemen:

Kristallisationsprozess, Verkehrsfluß, Räuber–Beute–Systeme für Fischbestände, Modellierung von Farbmuster auf Tierfellen,...

Ziele:

- Erstellung von (einfachen) mathematischen Modellen zu deren Beschreibung
- analytische bzw. numerische Lösung der erhaltenen Differentialgleichungen
- Interpretation der Ergebnisse

Voraussetzungen: Praktische Mathematik, Gewöhnliche Differentialgleichungen
Teilnehmer: Studierende der Mathematik, Lehramt Mathematik, Physik
Vorbesprechung: Mittwoch, 21.2., 16 c.t., Gebäude 36.1, Raum U12