Universität des Saarlandes
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt

Wintersemester 2000/2001

9. Übungsblatt zur Vorlesung "Praktische Mathematik"

(Potenzmethode, Satz von Gerschgorin)

1. Aufgabe (1.5 Punkte (0.5+1))

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}\,.$$

a) Berechnen sie die Eigenwerte von A.

b) Führen Sie 4 Schritte der Potenzmethode

$$x_{k+1} = Ax_k, \quad k = 0, \dots, 3$$

ausgehend vom Startwert $x_0 = (1,0)^\top$ durch. Vermuten Sie einen Eigenvektor zum betragsgrößten Eigenwert und beweisen Sie Ihre Vermutung.

2. Aufgabe (2 Punkte)

Zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 10 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

soll der betragsmäßig größte Eigenwert λ_{max} und der zugehörige Eigenvektor durch die Potenzmethode (Vektoriteration) mit Startvektor $x^{(0)} = (0,1,0)^\top$ bestimmt werden. Führen Sie 4 Schritte des Verfahrens aus. Überprüfen Sie die Güte der drei Approximationen $\tilde{\lambda}_j = x_j^{(4)}/x_j^{(3)}$, $1 \le j \le 3$, an λ_{max} mit Hilfe des Satzes $(*)$. Für welche Approximation erhält man die beste Fehlerabschätzung in der $\|\cdot\|_2$–Norm?

Satz $(*)$:
Die hermitesche $n \times n$–Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dann gilt für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0$, die Abschätzung

$$\min_{1\le j\le n} |\lambda - \lambda_j| \le \frac{\|Ax - \lambda x\|_2}{\|x\|_2}.$$

3. Aufgabe (3.5 Punkte (1+1+1.5))

Wir betrachten die *inverse Potenzmethode* (inverse Iteration) zur Bestimmung von Eigenvektoren symmetrischer Matrizen. Sei dazu α eine sehr gute Näherung an den Eigenwert

λ_j der Matrix A. Offensichtlich ist das Gleichungssystem $(A-\alpha I)\,y = x$ beliebig schlecht konditioniert, je nachdem, wie gut der Näherungswert α ist. Es stellt sich daher die Frage, ob die Lösung noch sinnvolle Information enthält.
Wir nehmen nun an, daß y aufgrund von Rundungsfehlern die folgende Gleichung erfülle:

$$(A - \alpha I - H)\,y = x + f.$$

a) Zeigen Sie: Für den *Gesamtfehler* e gilt

$$e = (A - \alpha I)^{-1}\,g$$

mit $g = f + Hy$.

b) Zerlegen Sie g in den Anteil in Richtung des Eigenvektors v_j und in Richtung u mit $u \perp v_j$. Finden Sie damit eine *orthogonale Zerlegung* von e.

c) Zeigen Sie: Für den Winkel η zwischen v_j und e, gilt:

$$\tan\eta \le \frac{|\lambda_j - \alpha|}{\min\limits_{k\neq j} |\lambda_k - \alpha|}\,\tan\psi \quad \text{mit} \quad \psi = \angle(g, v_j).$$

Interpretieren Sie dieses Ergebnis.

Hinweis: Verwenden Sie die *Spektraldarstellung* von A:
$Ax = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \,\langle x, x_j\rangle\, x_j$, mit $x_1, \ldots, x_n$ ONB des $\mathbb{C}^n$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$.

4. Aufgabe (3 Punkte (1.5+1.5))

a) Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes $(*)$: Ist $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch, so gibt es zu jedem Diagonalelement a_{ii} einen Eigenwert λ der Matrix A, der der Ungleichung

$$|\lambda - a_{ii}| \le \left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

genügt. Ist diese Aussage stärker oder schwächer als der Satz von Gerschgorin?

b) Benutzen Sie die Abschätzung aus Teil a) um zu zeigen, daß die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.3 & -0.7 & 0.6 \\ 0.3 & -2.5 & 1.2 & -0.5 \\ -0.7 & 1.2 & 4.5 & 0.5 \\ 0.6 & -0.5 & 0.5 & 2 \end{pmatrix}$$

genau einen Eigenwert im Intervall [1,3] hat.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 9.1.2001 vor der Vorlesung.

Wir wünschen allen Hörern ein gesegnetes Weihnachtsfest

und einen guten Rutsch ins neue Jahr 2001!