Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Wintersemester 05/06

5. Übungsblatt zur Vorlesung "Asymptotische Analysis"
(Mehrskalenmethode und langsam variierende Koeffizienten)

1. Aufgabe (4 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe der *Mehrskalenmethode* für die folgenden Anfangswertprobleme eine 1-Term–Entwicklung, die für große t gültig ist.

a) $y'' + \varepsilon(y')^3 + y = 0,$ für $t > 0,$ wobei $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$ (UE)
(Hinweis: $\cos^3\phi = \frac{1}{4}[3\cos\phi + \cos(3\phi)]$)

b) $\varepsilon y'' + \varepsilon\alpha y' + y + \varepsilon y^3 = 0,$ für $t > 0,$ wobei $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ und α ist eine positive Konstante.

2. Aufgabe (UE)

Die Gleichung für die Winkelauslenkung $\theta(t)$ eines Pendels lautet

$$\theta'' + \sin(\theta) = 0, \text{ für } t > 0,$$

wobei $\theta(0) = \varepsilon$ und $\theta'(0) = 0$ ist. Bestimmen Sie eine 1-Term–Entwicklung der Lösung im Falle von kleinen Oszillationen der Amplitude (d.h. $\varepsilon << 1$), die für große Werte von t gültig ist.

3. Aufgabe (6 Punkte (2+2+2))

Betrachten Sie den *langsam variierenden ungedämpften Oszillator* aus der Vorlesung:

$$y'' + k^2(\varepsilon t)y = 0, \text{ für } t > 0, \text{ wobei } y(0) = a,\ y'(0) = b.$$

a) Man entwickle $k(\varepsilon t)$ mit Hilfe des Satzes von Taylor (für ε klein) und wende dann eine Standard-Mehrskalentransformation: $t_1 = t$, $t_2 = \varepsilon^\alpha t$ an. Wie verhält sich der erste Term im Vergleich zu

$$y \sim \frac{1}{\sqrt{k(\varepsilon t)}}\left(\alpha_0 \sin\Big(\int_0^t k(\varepsilon\tau)\,d\tau\Big)\beta_0\cos\Big(\int_0^t k(\varepsilon\tau)\,d\tau\Big)\right) \quad ? \qquad (*)$$

Für welches Zeitintervall gilt diese Entwicklung?

b) Zeigen Sie, daß die *schnelle Zeitskala*

$$f(t,\varepsilon) = \int_0^t k(\varepsilon\tau)\,d\tau$$

die folgenden Bedingungen erfüllt.

(i) $f(t,\varepsilon)$ ist positiv und wächst mit t,

(ii) $\varepsilon t << f$ für $\varepsilon \downarrow 0$,

(iii) $f(t,\varepsilon)$ ist glatt.

Ist es nötig, daß $f(0,\varepsilon) = 0$ gilt?

c) Ändert sich (*), wenn man anstatt von $t_2 = \varepsilon t$ die Zeitskala $t_2 = \varepsilon t_1$ nimmt?

4. Aufgabe (UE)

Betrachten Sie das Problem

$$\frac{d}{dt}\Big(D(\varepsilon t)\frac{dy}{dt}\Big) + y = 0, \text{ für } t > 0, \text{ wobei } y(0) = \alpha,\ y'(0) = \beta.$$

Der Koeffizient $D(\tau)$ ist hierbei eine glatte positive Funktion mit $D' > 0$. Bestimmen Sie eine 1-Term–Entwicklung der Lösung, die für große Werte von t gültig ist.

- Die Aufgaben mit (UE) werden in der Übung am Do, 12.1. vorgerechnet.
- **Abgabe** der Lösungen zu den Aufgaben am Fr, 20.1. **vor** der Vorlesung.