Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Wintersemester 06/07

1. Übungsblatt zur Vorlesung "Asymptotische Analysis"

(Ordnungssymbole und asymptotische Approximationen)

1. Aufgabe (2 Punkte (1+1))

Welche Werte von α (wenn überhaupt) liefern $f = \mathrm{O}(\varepsilon^\alpha)$ bzw. $f = \mathrm{o}(\varepsilon^\alpha)$ für $\varepsilon \downarrow 0$?

a) $f = \sqrt{1+\varepsilon^2}$. (UE)

b) $f = \varepsilon \sin(\varepsilon)$. (UE)

c) $f = (1 - e^\varepsilon)^{-1}$.

d) $f = \ln(1+\varepsilon)$.

2. Aufgabe (4 Punkte (2+2))

a) Zeigen Sie: $f = \mathrm{O}(\varepsilon^\alpha)$ für $\varepsilon \downarrow 0 \Longrightarrow f = \mathrm{o}(\varepsilon^\beta)$ für $\varepsilon \downarrow 0$ für jedes $\beta < \alpha$. (UE)

b) Zeigen Sie: Wenn $f = \mathrm{O}(g)$ für $\varepsilon \downarrow \varepsilon_0$, dann $|f|^\alpha = \mathrm{O}(|g|^\alpha)$ für $\varepsilon \downarrow \varepsilon_0$ für jedes positive α.

c) Geben Sie ein Beispiel an, um zu zeigen daß $f = \mathrm{O}(g)$ für $\varepsilon \downarrow \varepsilon_0$ nicht notwendigerweise $e^f = \mathrm{O}(e^g)$ für $\varepsilon \downarrow \varepsilon_0$ impliziert.

3. Aufgabe (2 Punkte)

Sind die folgenden Sequenzen *wohlgeordnet* (für $\varepsilon \downarrow 0$) ? Falls nicht, ordnen Sie sie derart an, daß sie es sind oder erklären Sie, warum dies unmöglich ist.

a) $\phi_1 = e^\varepsilon - 1 - \varepsilon$, $\phi_2 = e^\varepsilon - 1$, $\phi_3 = e^\varepsilon$, $\phi_4 = e^\varepsilon - 1 - \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2$. (UE)

b) $\phi_1 = \varepsilon^5 e^{-3/\varepsilon}$, $\phi_2 = \varepsilon$, $\phi_3 = \varepsilon \ln(\varepsilon)$, $\phi_4 = e^{-\varepsilon}$, $\phi_5 = \frac{\sin(\varepsilon^3)}{\varepsilon}$, $\phi_6 = \frac{1}{\ln(\varepsilon)}$.

4. Aufgabe (2 Punkte)

Es gelte $f \sim a_1\varepsilon^\alpha + a_2\varepsilon^\beta + \ldots$. Bestimmen Sie α, β (mit $\alpha < \beta$) und nichtverschwindende a_1, a_2 für die folgenden Funktionen:

a) $f = \left[1 + \frac{1}{\cos(\varepsilon)}\right]^{3/2}$. (UE)

b) $f = \sinh(\sqrt{1+\varepsilon x})$, für $0 < x < \infty$.

5. Aufgabe (UE)

Der *Entropiesprung* $[[S]]$ über eine Schockwelle in einem Gas ist gegeben durch die Formel (Cole und Cook, 1986):

$$[[S]] = c_v \ln \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}\,\varepsilon}{1 - \frac{\gamma+1}{2}\,\varepsilon} \, (1-\varepsilon)^\gamma \right),$$

mit $c_v > 0$, $\gamma > 1$ und der *Schockstärke* ε.
Bestimmen Sie eine 1–Term Entwicklung des Entropiesprungs für einen *schwachen Schock* (d.h. $\varepsilon << 1$).

- Die Aufgaben mit (UE) werden in der Übung am Fr, 3.11. vorgerechnet.
- **Abgabe** der Lösungen zu den Aufgaben am Do, 9.11. **vor** der Vorlesung.