Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
PD Dr. M. Ehrhardt

Wintersemester 07/08

7. Übungsblatt zur Vorlesung "Asymptotische Analysis"

(WKB–Methode)

1. Aufgabe (10 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe der *WKB–Methode* eine approximative Lösung zum *Einführungsbeispiel* aus Abschnitt 2.1:

$$\varepsilon y'' + 2y' + 2y = 0, \text{ für } 0 < x < 1, \text{ wobei } y(0) = 0 \text{ und } y(1) = 1.$$

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit

a) der zusammengesetzten asymptotischen Entwicklung

$$y(x) \sim e^{1-x} - e^{1-2x/\varepsilon}$$

und

b) der exakten Lösung

$$y(x) = \frac{e^{r_+ x} - e^{r_- x}}{e^{r_+} - e^{r_-}} \text{ mit } \varepsilon r_\pm = -1 \pm \sqrt{1 - 2\varepsilon}.$$

2. Aufgabe (UE)

In der Theorie des *kollektiven Ruins* (Peters und Mangel, 1990) stößt man auf die Variable $R(x)$, die die Wahrscheinlichkeit ist, Resourcen für Notfälle (d.h. Risikoreserven) zu haben. Sie erfüllt die Integro–Differentialgleichung

$$\varepsilon\beta(x)R' - R + \lambda \int_0^{x/\varepsilon} R(x - \varepsilon y)e^{-\lambda y}\, dy = 0, \text{ für } 0 < x < \infty,$$

wobei $R(x) \to 1$ für $x \to \infty$. Weiterhin ist λ eine positive Konstante und $\beta(x)$ eine glatte positive Funktion.

a) Bestimmen Sie die exakte Lösung, falls β eine positive Konstante ist. Erklären Sie, warum man $\lambda\beta > 1$ fordern muß.

b) Bestimmen Sie, ausgehend von den Beobachtungen aus Teil a), den ersten Term einer WKB–Entwicklung der Lösung, falls β nicht konstant ist. Welche Bedingungen muß man an λ und β stellen?

Referenz: C.S. Peters und M. Mangel, *New methods for the problem of collective ruin*, SIAM J. Appl. Math. **50** (1990), 1442-1456.

3. Aufgabe (UE)

Bestimmen Sie mit Hilfe der *WKB–Methode* eine approximative Lösung zu dem *Beispiel für mehrere Grenzschichten* aus Abschnitt 2.2:

$$\varepsilon^2 y'' + \varepsilon x y' - y = -1, \text{ für } 0 < x < 1, \text{ wobei } y(0) = 0 \text{ und } y(1) = 3.$$

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der zusammengesetzten asymptotischen Entwicklung (vgl. Abschnitt 2.2).

- Die Aufgaben mit (UE) werden in der Übung am Di, 12.2. vorgerechnet.
- **Abgabe** der Lösungen zu den Aufgaben am Do, 14.2. **vor** der Vorlesung.