Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
PD Dr. M. Ehrhardt

Wintersemester 08/09

6. Übungsblatt zur Vorlesung "Asymptotische Analysis"

(Angeregte Bewegung nahe Resonanz, Grenzschichten und Differenzengleichungen)

1. Aufgabe (UE)

Bei der Untersuchung des Raman–Effekts (inelastische Lichtstreuung) stößt man auf die Gleichung für einen *angeregten Morse–Oszillator mit schwacher Dämpfung*:

$$y'' + \varepsilon^{2/3}\alpha y' + (1 - e^{-y})e^{-y} = \varepsilon \cos\Big[(1 + \varepsilon^{2/3}\omega)t\Big], \quad t > 0,$$

wobei $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$ ist. Weiterhin sei der Dämpfungsparameter $\alpha \geq 0$.

a) Bestimmen Sie eine 1–Term Approximation von $y(t)$, die für große t gültig ist. Falls Sie nicht das Problem, das die t_2–Abhängigkeit bestimmt, lösen können, berechnen Sie die möglichen Stationärzustände der Amplitude.

b) Lie und Yuan (1986) benutzten numerische Methoden, um dieses Problem zu lösen. Sie waren daran interessiert, wie wichtig der Wert des Dämpfungsparameters α für das Auftreten von mehreren Stationärzuständen der Amplitude ist. Lie und Yuan konnten diese Frage aufgrund der hohen Rechenzeiten damals nicht klären. Ausgehend von ihren Berechnungen jedoch stellten Sie die Hypothese auf, daß mehrere Stationärzustände für die Amplitude auch bei kleinen Werten von α möglich sind. Skizzieren Sie den Graphen von A_∞ als eine Funktion von ω für $\alpha \geq 0$ und klären Sie so, ob diese Hypothese korrekt ist oder nicht.

Referenz: G.C. Lie und J.-M. Yuan, *Bistable and chaotic behavior in a damped driven Morse oscillator: A classical approach.*, J. Chem. Phys. **84** (1986), 5486–5493.

2. Aufgabe (10 Punkte (4+4+2))

Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\varepsilon y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \text{ für } 0 < x < 1, \text{ wobei } y(0) = \alpha \text{ und } y(1) = \beta.$$

Hierbei seien $p(x)$, $q(x)$ und $f(x)$ glatt und $p(x) > 0$ für $0 \leq x \leq 1$.

a) Konstruieren Sie eine Entwicklung der Lösung mit Hilfe der zusammengesetzten asymptotischen Entwicklungen.

b) Sei

$$x_1 = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x p(s)\,ds$$

und $x_2 = x$. Bestimmen Sie eine *1-Term Mehrskalen–Approximation.*

c) Diskutieren Sie die Unterschiede zwischen Ihren Ergebnissen aus Teil a) und b). Kommentieren Sie den Spezialfall, wenn $p(x)$ und $q(x)$ konstant sind.

3. Aufgabe (UE)

Diese Aufgabe behandelt die Herleitung der allgemeinen Lösung der Differenzengleichung zweiter Ordnung:

$$y_{n+1} + by_n + cy_{n-1} = f_n, \text{ für } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

wobei b, c Konstanten mit $b^2 < 4c$ sind.

a) Nehmen Sie $y_n = r^n$ an und zeigen Sie, daß die Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung in der Form $y_n = A\rho^n \cos(n\phi + \theta)$ oder $y_n = \alpha\rho^n \cos(n\phi) + \beta\rho^n \sin(n\phi)$ mit $\rho = \sqrt{c}$ und $\cos(\phi) = -b/(2\rho)$ geschrieben werden kann.

b) Um eine Partikulärlösung zu finden, verwenden Sie $y_n = a_n Y_n + b_n Z_n$, wobei Y_n und Z_n linear unabhängige Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung sind (*'Variation der Konstanten'*). Von der Differenzengleichung und der Bedingung $(a_{n+1} - a_n)Y_n + (b_{n+1} - b_n)Z_n = 0$ leiten Sie die folgende Partikulärlösung ab:

$$y_n = \frac{1}{\sin\phi} \sum_{i=1}^{n-1} f_i \rho^{n-i-1} \sin[(n-i)\phi], \text{ für } n = 2, 3, 4 \ldots,$$

c) Sei $\omega_n = A\rho^n \cos(n\phi + \theta)$, wobei ρ und θ in Teil a) definiert sind. Kommentieren Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus Teil a) und b) die n–Abhängigkeit der Partikulärlösung im Vergleich zur n–Abhängigkeit der zugehörigen homogenen Gleichung für die Fälle

(i) $f_n = k\omega_n + \kappa\omega_{n-1}$, wobei k und κ Konstanten sind,

(ii) $f_n = \omega_n^3$.

4. Aufgabe (praktische Aufgabe)

Bestimmen Sie numerisch eine Lösung zu dem *Einführungsbeispiel* aus Abschnitt 2.1:

$$\varepsilon y'' + 2y' + 2y = 0, \text{ für } 0 < x < 1, \text{ wobei } y(0) = 0 \text{ und } y(1) = 1.$$

Vergleichen Sie dabei Ihre numerische Lösung mit der *exakten Lösung*

$$y(x) = \frac{e^{r_+ x} - e^{r_- x}}{e^{r_+} - e^{r_-}} \text{ mit } \varepsilon r_\pm = -1 \pm \sqrt{1 - 2\varepsilon}.$$

Bei der Wahl des Verfahrens haben Sie die Wahl zwischen der MATLAB–Routine `bvp4c`, der Scilab–Routine `bvode` und dem Programmpaket `SBVP 1.0` (basierend auf MATLAB).

- Die Aufgaben mit (UE) werden in der Übung am Di, 27.1. vorgerechnet.
- **Abgabe** der Lösungen zu den Aufgaben am Do, 29.1. **vor** der Vorlesung.