Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
PD Dr. M. Ehrhardt

Sommersemester 2007

3. Übungsblatt zur VL "Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen"

(Variationsprobleme)

1. Aufgabe (2 Punkte)

Formulieren Sie das Problem: „Finde die kürzeste Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten in $\mathbb{R}^n$" in ein Variationsproblem um, und lösen Sie es.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Das Problem der *Brachistochrone* besteht darin, diejenige Kurve zu bestimmen, auf der ein Körper reibungsfrei unter dem alleinigen Einfluß der Schwerkraft in kürzester Zeit von $A = (a, c) \in \mathbb{R}^2$ nach $B = (b, d) \in \mathbb{R}^2$ gelangen kann. Sind die zulässigen Kurven Graphen stetig differenzierbarer Funktionen $f \in C^1[a, b]$ mit $f(a) = c$ und $f(b) = d$, so gilt für die Geschwindigkeit nach dem Energiesatz $v(t) = \sqrt{2g(c - f(t))}$. Es folgt für den zurückgelegten Weg $s(t) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}dt$ und für die Zeit

$$T(f) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_a^b \sqrt{\frac{1 + (f'(t))^2}{c - f(t)}}\, dt.$$

Das durch $T(f)$ definierte Funktional ist zu minimalisieren.

Hinweis. *Eugenio Beltrami (1835-1900)* ist es im Jahre 1868 durch geignete Umformungen gelungen, die *Euler–Lagrange*–Gleichung (siehe Vorlesung) in die Gleichung

$$-\nabla_x L(\nabla u, u, x) + \nabla_x \Big[L(\nabla u, u, x) - \nabla u \cdot \nabla_p L(\nabla u, u, x) \Big] \;=\; 0, \quad x \in \Omega$$

umzuschreiben. Man nennt sie die *Beltrami*–Gleichung.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Das Variationsproblem

$$\int_a^b \frac{n(x, y(x))}{c} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx \;=\; \min! \tag{1}$$

stellt das *Grundproblem der geometrischen Optik* dar, das Prinzip von *Fermat (1601-1665)* , das aussagt, dass sich die Lichtstrahlen zwischen zwei Punkten so bewegen, dass sie die kürzeste Zeit benötigen. Dabei ist $y = y(x)$ die Bahnkurve eines Lichtstrahls, c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und $n(x, y)$ der Brechungsindex im Punkt (x, y).

Das Integral in (1) ist gleich der Zeit, die das Licht in dem brechenden Medium benötigt, um vom Punkt (a, c) zum Punkt (b, d) zu gelangen.

Lösen Sie das Variationsproblem mit $n(x, y) = \sqrt{1+y}$, für $y > -1$. Nehmen Sie der Einfachheit halber als Startpunkt $(0, 0)$, und zeigen Sie, dass alle Lichtstrahlen durch $(0, 0)$ „oberhalb“ der Parabel (*Kaustik*) $y(x) = \frac{x^2}{4} - 1$ verlaufen.
Hinweis. Der Integrand erfüllt zwar die Koerzivitätsbedingung in y' nicht, dennoch liefert der Satz 14.15 aus der Vorlesung die hinreichende Bedingung für die Minimierer.

4. Aufgabe (UE)

Sei $q > 1$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand.

a) Gegeben sei das Dirichlet–Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= -|u|^{q-1}u + f(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei $f \in L^\infty(\Omega)$ ist. Zeigen Sie die Existenz eines Minimierers für das entsprechende Energiefunktional in $W_0^{1,q}(\Omega)$ für $q \geq 2$.

b) Betrachten Sie nun das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= |u|^{q-1}u \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass

- die direkten Variationsmethoden aus der Vorlesung nicht anwendbar sind;
- das entsprechende Energiefunktional $E(u)$ weder nach oben noch nach unten beschränkt ist.

Bemerkung. Es existieren tatsächlich nichttriviale Lösungen für beide Probleme in $W_0^{1,q}(\Omega)$ (mit Hilfe von *Sattelpunkt–Methoden*).

5. Aufgabe (UE)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Erklären Sie, warum die Methoden aus der Vorlesung zum Beweis der Existenz eines Minimierers für das Funktional

$$E(u) = \int_\Omega (1 + |\nabla u|^2)^{1/2} \, dx$$

auf

$$U = \left\{ u \in W^{1,q}(\Omega) \mid u = g \text{ auf } \partial\Omega \right\}, \qquad \text{für alle } 1 \leq q < \infty,$$

nicht funktionieren.

- Die Aufgaben mit (UE) werden in der Übung am Fr, 1.6. vorgerechnet.
- **Abgabe** der Lösungen zu den Aufgaben am Do, 7.6. **vor** der Vorlesung.