

10. Übungsblatt zur Vorlesung “Numerik partieller Differentialgleichungen” (Schwache Formulierung, Ansatzräume)

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben bis Mo, 6.7. vor der Übung.

Abgabe der Lösungen zu der praktischen Aufgabe bis Di, 14.7. 9:00.

1. Aufgabe (2 Punkte (1+1))

Es sei $V = \{v \in H^1(0, 1) : v(0) = 0\}$.

Wir wählen als *Ansatzraum* $V_h = \text{Span}\{\varphi_j, j = 1, \dots, N\}$ mit

$$\varphi_j(x) = \max(0, 1 - |Nx - j|), \quad x \in [0, 1], \quad j = 1, \dots, N.$$

a) Zeigen Sie: $V_h \subset V$.

b) Beweisen Sie, daß V_h ein N -dimensionaler Unterraum von V ist.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$-(a(x)u')' = 0, \quad x \in (-1, 1), \quad u(-1) = 3, \quad u(1) = 0$$

mit

$$a(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0, \\ 0.5, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Man gebe eine *schwache Formulierung* dieser Aufgabe an und bestimme ihre Lösung.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$, wobei $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

Seien c, f, g, p, q stetig. Definiere $V := \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ auf } \Gamma_1\}$.

Die Funktion $u \in H^1(\Omega)$ mit $u = g$ auf Γ_1 erfülle die *schwache Formulierung*

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v + c u v \, dx + \int_{\Gamma_2} (p u - q) v \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \text{für alle } v \in V.$$

Sei nun zusätzlich $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Stellen Sie das zugehörige klassische Problem auf und beweisen Sie, dass u es löst.

4. Aufgabe (Praktische Aufgabe) (5 Punkte)

Gegeben sei das Randwertproblem

$$-(a(x)u')' = 1, \quad x \in (-1, 1), \quad u(-1) = u(1) = 0$$

mit

$$a(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0, \\ 0.5, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- a) Diskretisieren Sie das Randwertproblem mittels *linearer finiter Elemente* auf einem äquidistanten Gitter der Schrittweite h .
- b) Geben Sie das diskrete Gleichungssystem an.
- c) Lösen Sie das diskrete System für die Schrittweiten $h = 1/10, 1/20$ und geben Sie die Lösung graphisch aus.
- d) Geben Sie den Programmcode mit ab.