Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
PD Dr. Matthias Ehrhardt
Dipl.-Math. Christian Kamm

Sommersemester 09

3. Übungsblatt zur Vorlesung "Numerik partieller Differentialgleichungen"
(ℓ^2–Stabilität im von Neumannschen Sinne)

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben bis Mo, 11.5. vor der Übung.

1. Aufgabe (2 Punkte)

Führen Sie die Stabilitätsuntersuchung des θ–Schemas aus der Vorlesung mithilfe der *formalen Fourier–Stabilitätstechnik* nach von Neumann durch.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 \end{aligned}$$

führt die Diskretisierung $D_t^0 u_j^n = D_x^2 u_j^n$ auf das folgende *explizite 3-Level Schema*

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} + 2\gamma\,(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - 4\gamma\, u_j^n,$$

wobei $\gamma = k/h^2$ das parabolische Schrittweitenverhältnis bezeichnet. Bestimmen Sie die Konsistenzordnung dieses Verfahrens. Ist dieses Verfahren ℓ^2–stabil (im von Neumannschen Sinne)?

3. Aufgabe (4 Punkte)

Eine Modifikation des Verfahrens aus der 2. Aufgabe zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung führt auf das *Dufort-Frankel Schema*

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} + 2\gamma\,(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - u_j^{n+1} - u_j^{n-1}).$$

Untersuchen Sie die ℓ^2–Stabilitätseigenschaften und die Konsistenzordnung dieses Verfahrens.