Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
PD Dr. Matthias Ehrhardt
Dipl.-Math. Christian Kamm

Sommersemester 09

7. Übungsblatt zur Vorlesung "Numerik partieller Differentialgleichungen"
(Diskretisierungen höherer Ordnung)

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben bis Mo, 8.6. vor der Übung.

1. Aufgabe (6 Punkte (2+2+2))

Betrachten Sie das folgende Randwertproblem 2. Ordnung

$$\begin{aligned} -u'' &= f \quad \text{in} \quad \Omega = (0,1) \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

und eine beliebige 3–Punkt–Approximation

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2}\big(\alpha_{i,0}u_{i-1} + \alpha_{i,1}u_i + \alpha_{i,2}u_{i+1}\big) &= \sum_{j=1}^{J} \beta_{i,j} f(\tau_{i,j}) \\ u_0 = u_N &= 0 \end{aligned}$$

auf dem Teilintervall $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, wobei $\alpha_{i,0}, \alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \beta_{i,j}$ zu bestimmende Parameter und $\tau_{i,j} \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ Hilfspunkte sind. Für das Schema soll gelten:

a) Das Schema ist exakt auf einem (L+1)–dimensionalen Raum S, d.h.

$$\frac{1}{h^2}\big(\alpha_{i,0}s_\ell(x_{i-1}) + \alpha_{i,1}s_\ell(x_i) + \alpha_{i,2}s_\ell(x_{i+1})\big) = -\sum_{j=1}^{J} \beta_{i,j} s_\ell''(\tau_{i,j})$$

für $\ell = 0, \ldots, L$, wenn s_0, $s_1, \ldots, s_L$ eine Basis von S bezeichnet.
In der Regel wird S dabei ein Teilraum der Polynome sein:

Lemma: *Ist S der Raum der Polynome vom Grad $\leq L$, so ist die Konsistenzordnung des Verfahrens $L-1$.*

b) Normierungsbedingung $\sum_{j=1}^{J} \beta_{i,j} = 1$.

Wählen Sie eine polynomiale Basis und lösen Sie folgende Fragestellungen:

a) Welches Verfahren liefert $J = 1$, $\tau_{i,1} = x_i$?

b) Wie muss man $\tau_{i,j}$ wählen um mit $J = 3$ das bekannte *Verfahren 4. Ordnung*

$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = \frac{1}{12}\big(f(x_{i-1}) + 10f(x_i) + f(x_{i+1})\big)$$

zu erhalten?

c) Kann man mit $J = 3$ eine noch höhere Konsistenzordnung erreichen?

Hinweis: Setzen Sie o.B.d.A. $x_i = 0$ und betrachten Sie das Intervall $[-h, h]$. Konstruieren Sie eine Basis des Polynomraums mit Nullstellen an den richtigen Orten.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Schreiben Sie das *Schema höherer Ordnung* aus der Vorlesung:

$$\begin{aligned} \Lambda' u(x) &= -\varphi(x), \qquad && x \in \Omega_h \\ u(x) &= \mu(x), && x \in \Gamma_h \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \Lambda' &= \Lambda_1 + \Lambda_2 + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12}\Lambda_1\Lambda_2 \\ \varphi &= f + \frac{h_1^2}{12}\Lambda_1 f + \frac{h_2^2}{12}\Lambda_2 f \end{aligned}$$

in der Form des *diskreten Maximumprinzips*. Unter welchen Bedingungen an h_1, h_2 sind die Voraussetzungen des Maximumprinzips erfüllt?