Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
PD Dr. Matthias Ehrhardt
Dipl.-Math. Christian Kamm

Sommersemester 09

8. Übungsblatt zur Vorlesung "Numerik partieller Differentialgleichungen"
(distributive Ableitung, Sobolev–Räume, Dualräume)

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben bis Mo, 15.6. vor der Übung.
Abgabe der Lösungen zu der praktischen Aufgabe bis Di, 23.6. 9:00 Uhr.

1. Aufgabe (3 Punkte (1+2))

a) Bestimmen Sie die *distributive Ableitung* von

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Existiert die *verallgemeinerte Ableitung* von H ?

b) Berechnen Sie die ersten zwei distributiven Ableitungen von

$$f(x) = |\sin x|.$$

2. Aufgabe (4 Punkte (2+2))

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit $0 \in \Omega$. Man beweise, daß die Funktion $u(x) = \|x\|_2^\sigma$ ein Element von $H^1(\Omega)$ ist, falls $\sigma = 0$ oder $2\sigma + n > 2$.

b) Sei $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < r_0\}$ mit $r_0 < 1$. Ist die Funktion

$$u(x, y) = \left(\log\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right)\right)^k, \quad k < \frac{1}{2}$$

stetig? Gilt $u \in H^1(\Omega)$?

3. Aufgabe (3 Punkte (1+2))

Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum und X' der zugehörige *Dualraum*, d.h. der Raum der stetigen linearen Funktionale auf X. Zeigen Sie

a) $\|F\|_{X'} := \sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \dfrac{|F(x)|}{\|x\|_X}$ ist eine Norm auf X'.

b) $(X', \|\cdot\|_{X'})$ ist ein Banach–Raum.

4. Aufgabe (Praktische Aufgabe) (6 Punkte)

Lösen Sie die praktische Aufgabe vom 5. Übungsblatt mit dem *Schema höherer Ordnung* aus der Vorlesung, Kapitel 3.7. Überprüfen Sie wiederum die Konvergenzordnung mittels eines Plots der Fehler über N. Ihre Abgabe soll diesen Plot, einen Plot der Lösung für $N = 8$ und Ihren Programmcode enthalten.