

Mathematische Modellierung von tierischen
Ökosystemen – ein Populationsmodell für
Fichtenwickler
Teil 2 Aufstellen der Differentialgleichungen

Manuel Koch

14. Dezember 2007

- Populationsdynamik als Teilgebiet der Ökologie,
- Veränderungen der Dichte einer Population über die Zeit
- beeinflusst durch dichteunabhängige und - abhängige Faktoren
- dichteunabhängige Faktoren (unabhängig von der Zahl der Individuen)
 - Wetter und Witterung, Katastrophen, Pestizide etc,
- dichteabhängige Faktoren (abhängig von der momentanen Zahl der Individuen)
 - Nahrungsvorräte, Fressfeinde
 - Parasiten, sozialer Stress, Reviere, Infektionskrankheiten etc.

- Beschreibung der Populationsdynamik in einem *Populationsmodell*
 - Änderung der Populationsgröße N zu einem Zeitpunkt t ist abhängig von der
 - Geburtenrate \dot{G}
 - Sterberate \dot{S}
- ⇒ Änderung der Population $\dot{N} = \dot{G} - \dot{S}$
- Berücksichtigung unterschiedlicher Faktoren für Geburten- und Sterberate (z.B. Räuber-Beute-Beziehungen)

Nordamerikanischer Fichtentriebwickler (Spruce Budworm)

- Populationsänderung der Fichtenwickler (USA und Kanada)
- Larven befallen Nadelbäume (Fichten und Tannen),
- Natürliche Feinde sind insbesondere Vögel



⇒ DGL beachtet die Faktoren **Baumbestand** und **Fressfeinde**

⇒ *to be continued....*

Annahmen:

- **Wachstumsrate** der Fichtenwickler-Dichte ist abhängig vom Nahrungsvorrat
- exponentielles Wachstum modifiziert durch eine sich mit dem Wachstum verbrauchende Ressource (Nahrungsvorrat)

$$\dot{B} = r_B B \left(1 - \frac{B}{K_B}\right) \quad (1)$$

wobei

- r_B die Reproduktionsrate
- B die Dichte der Fichtenwickler ($\frac{\text{Larven}}{\text{acre}}$)
- K_B die max. Aufnahmekapazität des Baumbestands ($\frac{\text{Larven}}{\text{acre}}$)

Ziel: Effekt $g(B)$ der Fressfeinde auf die Fichtenwickler-Dichte.

Annahmen:

- Es existiert eine obere Grenze β für die Wurmsterblichkeit durch Fressfeinde (**Sättigung**).
- Der Effekt auf die Wurmsterblichkeit durch Fressfeinde nimmt bei geringer Wurmdichte quadratisch ab (**Suchstrategie**).

$$g(B) = \beta \frac{B^2}{\alpha^2 + B^2}, \quad (2)$$

wobei α die Wurmdichte (Larven/acre) ist, ab der Sättigung beginnt.

Wachstumsrate der Fichtenwickler-Dichte in **Abwesenheit** von Fressfeinden:

$$\dot{B} = r_B B \left(1 - \frac{B}{K_B}\right)$$

Wachstumsrate der Fichtenwickler-Dichte in **Anwesenheit** von Fressfeinden:

$$\dot{B} = r_B B \left(1 - \frac{B}{K_B}\right) - \beta \frac{B^2}{\alpha^2 + B^2} \quad (3)$$

Ziel: Bestimmen der Aufnahmekapazität K_B

Annahme: Abhängig von

- 1 der Menge der Bäume bzw. der Zweige pro Flächeneinheit
- 2 Gesundheitszustand der Bäume

Entwicklung der Differentialgleichung

Ziel: Bestimmen der Wachstumsrate der Zweige des Baumbestands (Zweige/acre)

$$\dot{S} = r_S S \left(1 - \frac{S}{K_S} \frac{K_E}{E}\right) \quad (4)$$

- r_S ist die Wachstumsrate des Baumbestands
- K_S ist das Maximum der Baumoberfläche ($\frac{\text{Zweige}}{\text{acre}}$)
- E ist die Energie-Reserve der Bäume (Gesundheit der Bäume, Zustand der Zweige)
- K_E ist das Maximum der Energie-Reserve
- $\frac{K_E}{E}$ Krankheitsfaktor

Ziel: Bestimmen der Wachstumsrate der Energiekapazität des Baumbestands

$$\dot{E} = r_E E \left(1 - \frac{E}{K_E}\right) - P \frac{B}{S} \quad (5)$$

- r_E Regenerationsrate
- E ist die Energie-Reserve der Bäume (Gesundheit der Bäume, Zustand der Zweige)
- K_E ist das Maximum der Energie-Reserve
- $\frac{B}{S}$ Stressfaktor durch Würmer (Larven/Zweig)
- P Proportionalitätskonstante

Zusammenfassung der Ergebnisse

$$\dot{B} = r_B B \left(1 - \frac{B}{K_B}\right) - \beta \frac{B^2}{\alpha^2 + B^2}$$

$$\dot{S} = r_S S \left(1 - \frac{S}{K_S} \frac{K_E}{E}\right)$$

$$\dot{E} = r_E E \left(1 - \frac{E}{K_E}\right) - P \frac{B}{S}$$

Aufnahmekap. K_B ($\frac{\text{Larven}}{\text{acre}}$) proportional z. Baumbestand S ($\frac{\text{Zweige}}{\text{acre}}$).

Aufnahmekapazität $K_B(\frac{Larven}{acre})$ proportional zum Baumbestand

$S(\frac{Zweige}{acre})$

$$K_B(\frac{Larven}{acre}) = K' S(\frac{Larven}{Zweige} \frac{Zweige}{acre}) \quad (6)$$

mit Konstante $K'(\frac{Larven}{Zweige})$.

Das System aus Differentialgleichungen

$$\dot{B} = r_B B \left(1 - \frac{B}{K'_S}\right) - \beta \frac{B^2}{\alpha^2 + B^2} \quad (7)$$

$$\dot{S} = r_S S \left(1 - \frac{S}{K_S} \frac{K_E}{E}\right) \quad (8)$$

$$\dot{E} = r_E E \left(1 - \frac{E}{K_E}\right) - P \frac{B}{S} \quad (9)$$