

Modellierung von Lawinenbewegungen

Die Savage-Hutter-Gleichungen

Lars Lubkoll

16. November 2007

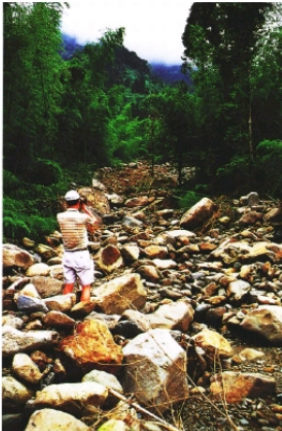
Inhaltsverzeichnis

- 1 Einleitung
- 2 Annahmen
- 3 Herleitung der Savage-Hutter-Gleichungen
 - Ausgangsgleichungen
 - Koordinatensystem
 - Tiefenmittelung
 - MOHR-COULOMB-Fließkriterium
 - Die Savage-Hutter-Gleichungen
- 4 Vor- und Nachteile des Modells
 - Vorteile
 - Nachteile
- 5 Quellen

Inhaltsverzeichnis

- 1 Einleitung
- 2 Annahmen
- 3 Herleitung der Savage-Hutter-Gleichungen
 - Ausgangsgleichungen
 - Koordinatensystem
 - Tiefenmittelung
 - MOHR-COULOMB-Fließkriterium
 - Die Savage-Hutter-Gleichungen
- 4 Vor- und Nachteile des Modells
 - Vorteile
 - Nachteile
- 5 Quellen

Einleitung



Lawinenarten

Fließlawinen

- (i) Schlammlawinen
- (ii) Gerölllawinen

Lawinenarten

Fließlawinen

- (i) Schlammlawinen
- (ii) Gerölllawinen
- (iii) Schneelawine

Lawinenarten

Fließlawinen

- (i) Schlammlawinen
- (ii) Gerölllawinen
- (iii) Schneelawine

Staublawinen

- (i) Gerölllawinen

Lawinenarten

Fließlawinen

- (i) Schlammlawinen
- (ii) Gerölllawinen
- (iii) Schneelawine

Staublawinen

- (i) Gerölllawinen
- (ii) Schneelawinen

Lawinenarten

Fließlawinen

- (i) Schlammlawinen
- (ii) Gerölllawinen
- (iii) Schneelawine

Staublawinen

- (i) Gerölllawinen
- (ii) Schneelawinen

Lawinenarten

In der Realität:

Schnee– und Gerölllawinen bestehen aus einer Mischung aus Staub – und Fließlawine

hier:

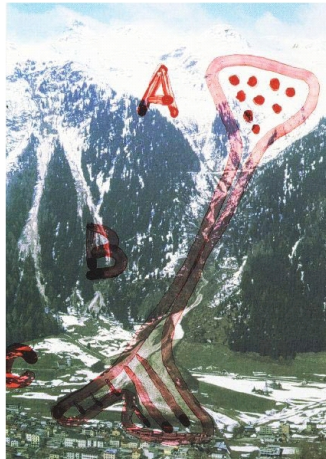
- *Betrachtung von Fließlawinen*
- *Herleitung und Analyse nur für einfache Topographien*

grobe Unterteilung der Lawinenbewegung

A: Lawine legt deutlich an Masse und Geschwindigkeit zu ($Steigung > 30^\circ$)

B: Lawine bewegt sich mit annähernd konstanter Masse und Geschwindigkeit ($20^\circ < Steigung < 30^\circ$)

C: Lawine wird langsamer und kommt zum Stehen ($Steigung < 20^\circ$)



Einleitung

Annahmen

Herleitung der Savage-Hutter-Gleichungen

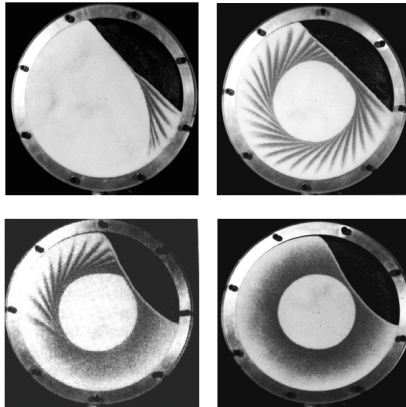
Vor- und Nachteile des Modells

Quellen

Anwendung in der Industrie



Catherine wheel Effekt



Inhaltsverzeichnis

- 1 Einleitung
- 2 Annahmen**
- 3 Herleitung der Savage-Hutter-Gleichungen
 - Ausgangsgleichungen
 - Koordinatensystem
 - Tiefenmittelung
 - MOHR-COULOMB-Fließkriterium
 - Die Savage-Hutter-Gleichungen
- 4 Vor- und Nachteile des Modells
 - Vorteile
 - Nachteile
- 5 Quellen

Annahmen

- 1 Massen-/Volumenerhaltung
- 2 Das Material ist nichtbindig und gehorcht einem MOHR-COULOMB-Fließkriterium

Annahmen

- 1 Massen-/Volumenerhaltung
- 2 Das Material ist nichtbindig und gehorcht einem MOHR-COULOMB-Fliesskriterium
- 3 Symmetrische Druckverteilung

Annahmen

- 1 Massen-/Volumenerhaltung
- 2 Das Material ist nichtbindig und gehorcht einem MOHR-COULOMB-Fliesskriterium
- 3 Symmetrische Druckverteilung
- 4 Scherkräfte quer zur Fließrichtung sind vernachlässigbar

Annahmen

- 1 Massen-/Volumenerhaltung
- 2 Das Material ist nichtbindig und gehorcht einem MOHR-COULOMB-Fliesskriterium
- 3 Symmetrische Druckverteilung
- 4 Scherkräfte quer zur Fließrichtung sind vernachlässigbar
- 5 $\frac{\text{Höhe}}{\text{Länge}} \ll 1$

Annahmen

- 1 Massen-/Volumenerhaltung
- 2 Das Material ist nichtbindig und gehorcht einem MOHR-COULOMB-Fliesskriterium
- 3 Symmetrische Druckverteilung
- 4 Scherkräfte quer zur Fließrichtung sind vernachlässigbar
- 5 $\frac{\text{Höhe}}{\text{Länge}} \ll 1$

Inhaltsverzeichnis

- 1 Einleitung
- 2 Annahmen
- 3 Herleitung der Savage-Hutter-Gleichungen**
 - Ausgangsgleichungen
 - Koordinatensystem
 - Tiefenmittelung
 - MOHR-COULOMB-Fließkriterium
 - Die Savage-Hutter-Gleichungen
- 4 Vor- und Nachteile des Modells
 - Vorteile
 - Nachteile
- 5 Quellen

Die Navier-Stokes-Gleichungen

Impulssatz:

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right) = -\nabla p + \eta \Delta u + (\lambda + \eta) \nabla(\nabla \cdot u) + f$$

hier (Impulssatz der Eulergleichungen):

$$(II) \quad \rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right) = -\nabla p + \rho g$$

ρ : Dichte p : Druck λ : dynamische Viskosität
 η : weitere Lamé-Viskositäts-Konstante
 g : Beschleunigung durch Erdanziehungskraft

Die Navier-Stokes-Gleichungen

Bewegungsgleichung(Massenerhaltung) für Flüssigkeiten

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0$$

hier ($\rho = \text{const.}$):

$$(I) \nabla \cdot u = 0$$

ρ : Dichte t : Zeit u : Geschwindigkeit

Randbedingungen

Am Boden ($b(x) = 0$):

$$u \cdot n^b = 0$$

$$n^b \cdot p - n^b (n^b \cdot p \cdot n^b) = -\left(\frac{u_s}{|u_s|}\right) (n^b \cdot p \cdot n^b) \tan \delta$$

An der Oberfläche ($h(x,t)=0$):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla h \cdot u = 0$$

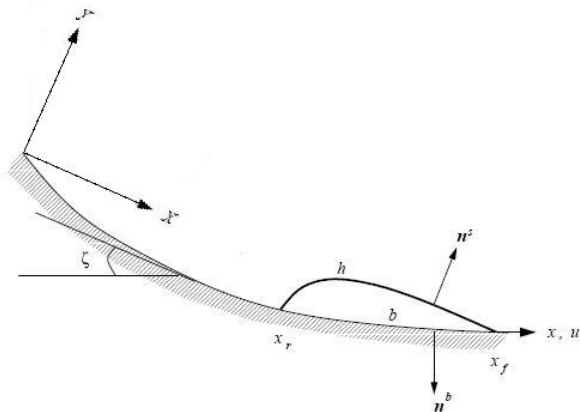
$$p \cdot n^h = 0$$

u: Geschwindigkeit **p**: Druck δ : lokaler Reibungswinkel

n^z, n^b : äußere Normalenvektoren

u_s : Gleitgeschwindigkeit

Drehung



Drehung

Aus (I):

$$(I) \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0$$

Aus (II):

$$(IIa) \quad \rho \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} = \rho g \sin \zeta - \frac{\partial p_{11}}{\partial x} - \frac{\partial p_{12}}{\partial y}$$

$$(IIb) \quad \rho \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = -\rho g \cos \zeta - \frac{\partial p_{12}}{\partial x} - \frac{\partial p_{22}}{\partial y}$$

Skalierung

Entdimensionalisierung und Skalierung ($\rightarrow O(1)$):

$$(x_{alt}, y_{alt}) = ([L]x_{neu}, [H]y_{neu})$$

$$(u_{1,alt}, u_{2,alt}, t_{alt}) = ([gL]^{1/2}u_{1,neu}, [H/L]^{1/2}u_{2,neu}, (L/g)^{1/2}t_{neu})$$

$$(p_{11,alt}, p_{22,alt}, p_{12,alt}) = [\rho g H \cos \zeta](p_{11,neu}, p_{22,neu}, p_{12,neu})$$

$$\frac{[H]}{[L]} = \epsilon \ll 1$$

Skalierung

skalierte Gleichungen:

$$(I) \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0$$

$$(IIa) \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} = \sin\zeta \left(1 - \frac{\partial p_{12}}{\partial y}\right) - \epsilon \cos\zeta \frac{\partial p_{11}}{\partial x}$$

$$(IIb) \epsilon \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = -\cos\zeta \left(1 + \frac{\partial p_{22}}{\partial y}\right) - \epsilon \sin\zeta \frac{\partial p_{12}}{\partial x}$$

Aus (IIb) mit $\epsilon \rightarrow 0$

$$p_{22}(x, y, t) = h(x, t) - y$$

Integration über die Lawinenhöhe:

Aus (I):

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_b^h u_1 dx - u_1(h) \frac{\partial h}{\partial x} + u_1(b) \frac{\partial b}{\partial x} + u_2(h) - u_2(b) = 0$$

Aus (IIa):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_b^h u_1 dy + \frac{\partial}{\partial t} \int_b^h u_1^2 dy - [u_1(\frac{\partial h}{\partial t} + u_1 \frac{\partial h}{\partial x} - u_2)]_{\text{Oberfl.}} + \\ [u_1(u_1 \frac{\partial b}{\partial x} - u_2)]_{\text{Boden}} = \sin \zeta [(h - b) - p_{12}(h) + p_{12}(b)] - \\ \epsilon \cos \zeta [\int_b^h p_{11} dy - p_{11}(h) \frac{\partial h}{\partial x} + p_{11}(b) \frac{\partial b}{\partial x}] \end{aligned}$$

Integration über die Lawinenhöhe:

Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + u_1 \frac{\partial h}{\partial x} - u_2 &= 0 \text{ bei } y = h(x,t) & u_1 \frac{\partial b}{\partial x} - u_2 &= 0 \text{ bei } y = b(x) \\ -\epsilon \cos \zeta p_{11} \frac{\partial h}{\partial x} + \sin \zeta p_{12} &= 0 \text{ bei } y = h(x,t) \\ -\epsilon \sin \zeta p_{12} \frac{\partial h}{\partial x} + \cos \zeta p_{22} &= 0 \text{ bei } y = h(x,t) \end{aligned}$$

Mit $p_{11} = k_{actpass} p_{22}$ folgt:

$$p_{12} = p_{22} = p_{11} = 0 \text{ bei } y = h(x,t)$$

Tiefenmittelung

Einführung gemittelter Werte:

$$\bar{u}(h - b) = \int_b^h u_1 dy,$$

$$\bar{p}_{11}(h - b) = \int_b^h p_{11} dy,$$

$$\bar{p}_{22}(h - b) = \int_b^h p_{22} dy$$

$$\bar{u}^2(h - b) = \int_b^h u_1^2 dy = \alpha_1 \bar{u}^2(h - b)$$

$\alpha_1 \approx 1$: Maß für die Abweichung des Bodenverlaufes von einer Geraden

MOHR-COULOMB-Fließkriterium

Dimensionslose Form des Coulomb'schen Gleitgesetzes ($\epsilon \ll 1$):

$$p_{12} = -\operatorname{sgn}(\bar{u})p_{22}\cot\zeta\tan\delta + O(\epsilon^2) \text{ bei } y = b(x)$$

Unter der Annahme, dass sich die Lawine wie ein nichtbindiges MOHR-COULOMB-Material verhält:

$$|S| = N\tan\Phi$$

$$p_{11} = k_{act/pass}p_{22}$$

S: Scherkraft **N:** Normalkraft

Φ : **interner Reibungswinkel**

δ : **Reibungswinkel am Boden**

$$k_{act} = 2[1 - (1 - (1 + \tan^2\delta)\cos^2\Phi)^{\frac{1}{2}}]/\cos^2\Phi - 1 \text{ für } \frac{\partial\bar{u}}{\partial x} > u$$

$$k_{pass} = 2[1 + (1 - (1 + \tan^2\delta)\cos^2\Phi)^{\frac{1}{2}}]/\cos^2\Phi - 1 \text{ für } \frac{\partial\bar{u}}{\partial x} < u$$

Die Savage-Hutter-Gleichungen

resultierende Gleichungen

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{h}\bar{u}) = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = (\sin\zeta - \tan\delta \operatorname{sgn}(\bar{u}) \cos\zeta) - \beta \frac{\partial \bar{h}}{\partial x}$$

$$\beta = \epsilon k_{actpass} \cos\zeta$$

Randbedingungen

$$h(x, t) = h_F \quad x = x_F(t)$$

$$h(x, t) = h_R \quad x = x_R(t)$$

Inhaltsverzeichnis

- 1 Einleitung
- 2 Annahmen
- 3 Herleitung der Savage-Hutter-Gleichungen
 - Ausgangsgleichungen
 - Koordinatensystem
 - Tiefenmittelung
 - MOHR-COULOMB-Fließkriterium
 - Die Savage-Hutter-Gleichungen
- 4 Vor- und Nachteile des Modells
 - Vorteile
 - Nachteile
- 5 Quellen

Vorteile

- 1 auf höhere Dimensionen erweiterbar
- 2 Skaleninvarianz

Vorteile

- 1 auf höhere Dimensionen erweiterbar
- 2 Skaleninvarianz
- 3 durch Laborversuche bestätigt

Vorteile

- 1 auf höhere Dimensionen erweiterbar
- 2 Skaleninvarianz
- 3 durch Laborversuche bestätigt
- 4 abhängig von nur 2 Parametern:
 - (i) interner Reibungswinkel
 - (ii) Reibungswinkel am Boden

Vorteile

- 1 auf höhere Dimensionen erweiterbar
- 2 Skaleninvarianz
- 3 durch Laborversuche bestätigt
- 4 abhängig von nur 2 Parametern:
 - (i) interner Reibungswinkel
 - (ii) Reibungswinkel am Boden
- 5 numerisch und in Spezialfällen analytisch lösbar

Vorteile

- 1 auf höhere Dimensionen erweiterbar
- 2 Skaleninvarianz
- 3 durch Laborversuche bestätigt
- 4 abhängig von nur 2 Parametern:
 - (i) interner Reibungswinkel
 - (ii) Reibungswinkel am Boden
- 5 numerisch und in Spezialfällen analytisch lösbar

Nachteile

- 1 selbst aktuelle Modelle auf Basis der Savage-Hutter-Gleichungen werden ungültig falls der interne Reibungswinkel kleiner als der Reibungswinkel am Boden ist.
- 2 Anwendung MOHR-COULOMB'sches Reibungsgesetzes unter Physikern umstritten

Nachteile

- 1 selbst aktuelle Modelle auf Basis der Savage-Hutter-Gleichungen werden ungültig falls der interne Reibungswinkel kleiner als der Reibungswinkel am Boden ist.
- 2 Anwendung MOHR-COULOMB'sches Reibungsgesetzes unter Physikern umstritten
- 3 Massen-/Volumenerhaltung gilt offensichtlich nicht in der Startphase

Nachteile

- 1 selbst aktuelle Modelle auf Basis der Savage-Hutter-Gleichungen werden ungünstig falls der interne Reibungswinkel kleiner als der Reibungswinkel am Boden ist.
- 2 Anwendung MOHR-COULOMB'sches Reibungsgesetzes unter Physikern umstritten
- 3 Massen-/Volumenerhaltung gilt offensichtlich nicht in der Startphase
- 4 Die Savage-Hutter-Gleichungen enthalten $O(1)$ - und $O(\epsilon)$ -Terme

Nachteile

- 1 selbst aktuelle Modelle auf Basis der Savage-Hutter-Gleichungen werden ungültig falls der interne Reibungswinkel kleiner als der Reibungswinkel am Boden ist.
- 2 Anwendung MOHR-COULOMB'sches Reibungsgesetzes unter Physikern umstritten
- 3 Massen-/Volumenerhaltung gilt offensichtlich nicht in der Startphase
- 4 Die Savage-Hutter-Gleichungen enthalten $O(1)$ - und $O(\epsilon)$ -Terme
- 5 Gleichungen nicht lösbar für stark variierende Topographien

Nachteile

- 1 selbst aktuelle Modelle auf Basis der Savage-Hutter-Gleichungen werden ungültig falls der interne Reibungswinkel kleiner als der Reibungswinkel am Boden ist.
- 2 Anwendung MOHR-COULOMB'sches Reibungsgesetzes unter Physikern umstritten
- 3 Massen-/Volumenerhaltung gilt offensichtlich nicht in der Startphase
- 4 Die Savage-Hutter-Gleichungen enthalten $O(1)$ - und $O(\epsilon)$ -Terme
- 5 Gleichungen nicht lösbar für stark variierende Topographien

Inhaltsverzeichnis

- 1 Einleitung
- 2 Annahmen
- 3 Herleitung der Savage-Hutter-Gleichungen
 - Ausgangsgleichungen
 - Koordinatensystem
 - Tiefenmittelung
 - MOHR-COULOMB-Fließkriterium
 - Die Savage-Hutter-Gleichungen
- 4 Vor- und Nachteile des Modells
 - Vorteile
 - Nachteile
- 5 Quellen

Quellen

- 1 Savage, S.B. & Hutter, K. (1989) The motion of a finite mass of granular material down a rough incline, Journal of Fluid Mechanics 199, pp. 177-215
- 2 Pudasaini, S.P. (2003) Dynamics of flow avalanches over curved and twisted channels,
<http://elib.tu-darmstadt.de/diss/000393/>

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit!

Fragen?