# Modellierung von Lawinenbewegungen Die Savage-Hutter-Gleichungen

Lars Lubkoll

14. Dezember 2007

Lars Lubkoll Modellierung von Lawinenbewegungen

Image: A math a math

# Inhaltsverzeichnis

### 1 Transformation in neues Koordinatensystem

- 2 Exakte Lösungen der Savage-Hutter-Gleichungen
  - Parabolic cap solution
  - M-Welle
  - Schock-Welle
- 3 weitere exakte Lösungen
- 4 Konsequenzen f
  ür numerische L
  ösungen

## 5 Quellen

A (1) > (1) > (1)

# Die Savage-Hutter-Gleichungen

### Gleichungen (I)

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{h}\bar{u}) = 0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = (\sin\zeta - \tan\delta \operatorname{sgn}(\bar{u})\cos\zeta) - \beta \frac{\partial \bar{l}}{\partial x}$$

 $\beta = \epsilon \textit{k}_{\textit{actpass}} \textit{cos} \zeta$ 

#### Randbedingungen

$$h(x, t) = h_F x = x_F(t)$$
  
$$h(x, t) = h_R x = x_R(t)$$

・ロト ・日本 ・モート ・モート

#### Transformation in neues Koordinatensystem

Exakte Lösungen der Savage-Hutter-Gleichungen weitere exakte Lösungen Konsequenzen für numerische Lösungen Quellen

## neues Koordinatensystem



・ロト ・回ト ・ヨト

-≣->

# neues Koordinatensystem

#### Ortskoordinate und relative Geschwindigkeit

 $\eta = x - \frac{\xi}{g(t)}$  $\tilde{u} = u - u_0(t)$ 

$$\begin{split} \xi &= x - \int_0^t u_0(t') dt' \\ u_0(t) &= \int_0^t (\sin\zeta - \tan\delta\cos\zeta) dt' \end{split}$$

#### Annahmen

 $h(\xi, t) = h(-\xi, t)$  (Höhe achsensymmetrisch bzgl.  $\xi = 0$ )  $\tilde{u}(\xi, t) = -\tilde{u}(-\xi, t)$  (rel. Geschw. schiefsymm. bzgl.  $\xi = 0$ )

・ロン ・回 と ・ ヨ と ・ ヨ と

# Savage-Hutter-Gleichungen in neuen Koordinaten

#### transformierte Differentialoperatoren

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \left(\eta \frac{\dot{g}}{g} + \frac{u_0}{g}\right) \frac{\partial}{\partial \eta}$$
$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

Gleichungen (II) ( (I) transformiert,  $t = \tau$ )

(a) 
$$\frac{\partial h}{\partial t} - \eta \frac{\dot{g}}{g} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial \eta} (h\tilde{u}) = 0$$
  
(b)  $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \eta \frac{\dot{g}}{g} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} + \frac{1}{g} (\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\eta} + \beta \frac{\partial h}{\partial \eta}) = 0$ 

・ロン ・回と ・ヨン ・ヨン

Parabolic cap solution M-Welle Schock-Welle

# Inhaltsverzeichnis

### 1 Transformation in neues Koordinatensystem

- 2 Exakte Lösungen der Savage-Hutter-Gleichungen
  - Parabolic cap solution
  - M-Welle
  - Schock-Welle
- 3 weitere exakte Lösungen
- 4 Konsequenzen f
  ür numerische L
  ösungen

## 5 Quellen

▲ □ ► ▲ □ ►



Parabolic cap solution M-Welle Schock-Welle

### Wähle Ansatz $\tilde{u}(\eta, t) = \eta g'(t)$

Eingesetzt in (II)(b):  $\frac{\partial h}{\partial \eta} = -\frac{g\ddot{g}}{\beta}\eta$ Integration unter Berücksichtigung der RB  $h(\eta = \pm 1) = 0$  ergibt:  $h = \frac{g\ddot{g}}{2\beta}(1 - \eta^2)$ 

・ロト ・回ト ・ヨト ・ヨト

2

Parabolic cap solution M-Welle Schock-Welle

# Berechnung von g

#### Aus Massenerhaltung und konst. Dichte folgt:

$$\int_{\xi_R}^{\xi_F} h(\xi,t) d\xi = \int_{-1}^1 h(\eta,t) g(t) d\eta = M = const.$$

Hieraus ergibt sich nach Vertauschung von abh. und unabh. Variablen die Lösung

$$(g(g-1))^{\frac{1}{2}} + ln|g^{\frac{1}{2}} + (g-1)^{\frac{1}{2}}| = (3\beta M)^{\frac{1}{2}}t$$

Parabolic cap solution M-Welle Schock-Welle

## Parametric cap solution

#### Parameterabh. Lösung

$$egin{aligned} & ilde{u}(\eta,t) = [rac{2\kappa}{g}(g-1)]^{rac{1}{2}}\eta\ &h(\eta,t) = rac{\kappa}{g}(1-\eta^2) \end{aligned}$$

$$K = \frac{3\beta M}{2+3d_M}$$

#### Kontrollgleichung (Konsistenz mit Annahmen):

$$\lim_{t \to 0} rac{\dot{g}}{u_0} = rac{2\epsilon k_{actpass} cos \zeta}{sin \zeta - tan \delta cos \zeta} < 1$$

イロン イヨン イヨン イヨン

Parabolic cap solution M-Welle Schock-Welle

## Parametric cap solution

### Parameterabh. Lösung für $h(\eta = \pm \overline{1, t}) = d_M$ :

$$egin{aligned} & ilde{u}(\eta,t) = [rac{2K}{g}(g-1)]^{rac{1}{2}}\eta\ &h(\eta,t) = rac{K}{g}(1+d_M-\eta^2) \end{aligned}$$

$$K = \frac{3\beta M}{2+3d_M}$$

イロン イヨン イヨン イヨン

Parabolic cap solution M-Welle Schock-Welle

## Parametric cap solution



・ロト ・回ト ・ヨト

.⊒ .⊳

Parabolic cap solution M-Welle Schock-Welle

# Bemerkungen

#### Asymptotisches Verhalten: $t ightarrow \infty$

$$egin{aligned} & ilde{u} \sim (2\mathcal{K})^{rac{1}{2}}\eta \ & h \sim (rac{\mathcal{K}}{2})^{rac{1}{2}}t^{-1}(d_M+(1-\eta^2)) \ & g \sim (2\mathcal{K})^{rac{1}{2}}t \end{aligned}$$

#### Stabilität

Lösung ist asymptotisch stabil gegenüber Störungen welche g nicht stören

Lösung nur gültig für  $\epsilon$  hinreichend klein

イロン イヨン イヨン イヨン

Parabolic cap solution M-Welle Schock-Welle

### Parametric cap solution



イロン イヨン イヨン イヨン

æ

Parabolic cap solution M-Welle Schock-Welle

# Inhaltsverzeichnis

### 1 Transformation in neues Koordinatensystem

- 2 Exakte Lösungen der Savage-Hutter-Gleichungen
   Parabolic cap solution
  - M-Welle
  - Schock-Welle
- 3 weitere exakte Lösungen
- 4 Konsequenzen f
  ür numerische L
  ösungen

## 5 Quellen

▲ □ ► ▲ □ ►

Parabolic cap solution M-Welle Schock-Welle

### Ansatz

#### Wähle Ansatz

$$egin{aligned} h(\eta,t) &= t^{\gamma} H(\eta) \ \widetilde{u} &= t^{\delta} F(\eta) \ g(t) &= t^{lpha} \end{aligned}$$

einsetzen in (II) ergibt ein Differentialgleichungssystem, welches für  $\gamma = 2\delta$  und  $\delta = \alpha - 1$ unabh. von t ist Aus der Massenerhaltung folgt außerdem  $\alpha + \gamma = 0$  $\Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}, \beta = -\frac{2}{3}, \gamma = -\frac{1}{3}$ 

・ロン ・回 と ・ ヨン ・ ヨン

Parabolic cap solution M-Welle Schock-Welle

## M-Welle

#### einfache Lösungen für F und H

$$egin{aligned} \mathcal{F}(\eta) &= rac{2}{3}\eta\ \mathcal{H}(\eta) &= rac{1}{geta}(dM-(1-\eta^2)), d_M > 1 \end{aligned}$$

#### Lösung von (II)

$$egin{aligned} & ilde{u}(\eta,t)=rac{2}{3}t^{-rac{1}{3}}\eta\ &h(\eta,t)=rac{1}{geta}t^{-rac{2}{3}}(d_M-(1-\eta^2)), d_M>1\ &g(t)=t^{rac{2}{3}}\ &M=rac{2}{geta}(d_M-rac{2}{3}) \end{aligned}$$

イロン イヨン イヨン イヨン

э

Parabolic cap solution M-Welle Schock-Welle

## M-Welle



Э

Parabolic cap solution M-Welle Schock-Welle

# Bemerkungen

#### Stabilität

Lösung ist asymptotisch stabil gegenüber Störungen welche g nicht stören

#### Lösung ist inkonsistent falls t nicht folgende Bedingung erfüllt:

$$t > [rac{2}{3(sin\zeta - tan\delta cos\zeta)}]^{rac{3}{4}}$$

Parabolic cap solution M-Welle Schock-Welle

# Inhaltsverzeichnis

### 1 Transformation in neues Koordinatensystem

### 2 Exakte Lösungen der Savage-Hutter-Gleichungen

- Parabolic cap solution
- M-Welle
- Schock-Welle
- 3 weitere exakte Lösungen
- 4 Konsequenzen f
  ür numerische L
  ösungen

## 5 Quellen

▲ □ ► ▲ □ ►

Parabolic cap solution M-Welle Schock-Welle

## Schock-Welle



Sprungbedingungen (
$$\delta = \phi, s = 0$$
)  
 $h_l(u_l - v) - h_r(u_r - v) = 0$   
 $h_lu_l(u_l - v) - h_ru_r(u_r - v) = -\frac{\cos\zeta k_{actpass,l}h_l^2}{2} + -\frac{\cos\zeta k_{actpass,r}h_r^2}{2}$ 

Lars Lubkoll

# Inhaltsverzeichnis

### Transformation in neues Koordinatensystem

- 2 Exakte Lösungen der Savage-Hutter-Gleichungen
  - Parabolic cap solution
  - M-Welle
  - Schock-Welle

#### 3 weitere exakte Lösungen

4 Konsequenzen f
ür numerische L
ösungen

### 5 Quellen

- 4 同 ト - 4 三 ト

- ∢ ≣ >

## Ein einfaches Modell



イロン イヨン イヨン イヨン

# Ein einfaches Modell

beide Grenzen werden gleichzeitig entfernt

 $\eta_* < \eta < \eta_0$ 

$$u = \frac{2}{3} \left( \sqrt{\beta h_0} + \frac{\eta - \lambda}{t} \right)$$
$$h = \frac{1}{9\beta} \left( 2\sqrt{\beta h_0} - \frac{\eta - \lambda}{t} \right)^2$$

 $\eta^0 > \eta > \eta^*$ 

$$u = \frac{2}{3} \left( -\sqrt{\beta h_0} + \frac{\eta + \lambda}{t} \right)$$
$$h = \frac{1}{9\beta} \left( 2\sqrt{\beta h_0} + \frac{\eta + \lambda}{t} \right)^2$$

gültig für  $t < \frac{\lambda}{\sqrt{\beta h_0}} = \hat{t}$ für  $t > \hat{t}$  Berechnung einer exakten Lösung möglich aber numerische Auswertung problematisch  $\rightsquigarrow$  nur Berechnung von Näherungslösungen sinnvolk seiter and

## Ein einfaches Modell



Lars Lubkoll

Modellierung von Lawinenbewegungen

### Ein einfaches Modell



Lars Lubkoll Modellierung von Lawinenbewegungen

# Inhaltsverzeichnis

#### Transformation in neues Koordinatensystem

- 2 Exakte Lösungen der Savage-Hutter-Gleichungen
  - Parabolic cap solution
  - M-Welle
  - Schock-Welle
- 3 weitere exakte Lösungen
- 4 Konsequenzen f
  ür numerische L
  ösungen

### 5 Quellen

# Konsequenzen für numerische Lösungen

### auftretende Gradienten werden sehr groß und verursachen numerische Oszillationen

 am Lawinenende kommt es bei Auslösung und Ablagerung der Lawine zu Bewegungen

イロト イポト イヨト イヨト

# Konsequenzen für numerische Lösungen

- auftretende Gradienten werden sehr groß und verursachen numerische Oszillationen
- am Lawinenende kommt es bei Auslösung und Ablagerung der Lawine zu Bewegungen entgegengesetzt der Lawinenbewegung
- Schockwellen treten auf

- ∢ ⊒ ⊳

# Konsequenzen für numerische Lösungen

- auftretende Gradienten werden sehr groß und verursachen numerische Oszillationen
- am Lawinenende kommt es bei Auslösung und Ablagerung der Lawine zu Bewegungen entgegengesetzt der Lawinenbewegung
- Schockwellen treten auf

- ∢ ⊒ ⊳

# Inhaltsverzeichnis

#### Transformation in neues Koordinatensystem

- 2 Exakte Lösungen der Savage-Hutter-Gleichungen
  - Parabolic cap solution
  - M-Welle
  - Schock-Welle
- 3 weitere exakte Lösungen
- 4 Konsequenzen f
  ür numerische L
  ösungen

### 5 Quellen

- ∢ ≣ >

# Quellen

- Savage, S.B. & Hutter, K. (1989), The motion of a finite mass of granular material down a rough incline, Journal of Fluid Mechanics 199, pp. 177-215
- V.A. Chugunow, J.M.N.T. Gray, K. Hutter, Exact solutions of the Savage-Hutter equations for one-dimensional granular flows
- J.M.N.T. Gray, Y.C. Tai, K.Hutter, Shock waves and particle size in shallow granular flows

#### Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit!

・ロン ・四 と ・ ヨ と ・ モ と

æ

#### Fragen?

・ロン ・回 と ・ ヨン ・ モン

æ