Modellierung von Lawinenbewegungen
Die Savage-Hutter-Gleichungen

Lars Lubkoll

08. Januar 2008

Inhaltsverzeichnis

kinetische Verfahren für Erhaltungsgleichungen

1. Ansatz

Modellbildung mit Hilfe von Erhaltungssätzen und der Navier-Stokes- bzw. Eulergleichung (makroskopische Formulierung)

2. kinetischer Ansatz

Beschreibung der statistischen Teilchenverteilung (mikroskopische Formulierung)
$\rightsquigarrow$ Boltzmanngleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} m(x, v, t) + v \nabla_x m(x, v, t) + \frac{F}{m} \nabla_v m(x, v, t) = Q(f)$$

F: äußere Kraft, Q: nichtlineares Kollisionsintegral

Idee

Je nach Achsenskalierung $q = \epsilon^{-1}x$, $\tau = \epsilon^{-\alpha}t$, $\alpha \in [1, 2]$ bestehen resultieren die Navier-Stokes- bzw. Euler-gleichungen aus dem Grenzwert $\epsilon \longrightarrow 0$ der skalierten Boltzmanngleichung

konstruiere math.Zusammenhang zwischen der Lösung f der Boltzmanngleichung und der Lösung U des ursprünglichen Problems (hier: $u_t + f(u)_x = 0$) mittels Nebenbedingung

$$m(x, v, t) = \mu(u(x, t), v)$$

$\rightsquigarrow$ *Probleme* :

1. Bestimmung der Nebenbedingung μ

Idee

Je nach Achsenskalierung $q = \epsilon^{-1}x$, $\tau = \epsilon^{-\alpha}t$, $\alpha \in [1,2]$ bestehen resultieren die Navier-Stokes- bzw. Euler-gleichungen aus dem Grenzwert $\epsilon \to 0$ der skalierten Boltzmanngleichung

konstruiere math.Zusammenhang zwischen der Lösung f der Boltzmanngleichung und der Lösung U des ursprünglichen Problems (hier: $u_t + f(u)_x = 0$) mittels Nebenbedingung

$$m(x, v, t) = \mu(u(x, t), v)$$

$\rightsquigarrow$ *Probleme* :

1. Bestimmung der Nebenbedingung μ
2. Bestimmung von u aus m
   $\rightsquigarrow$ Lösungen ergeben sich als Momente der Dichte m

Idee

Je nach Achsenskalierung $q = \epsilon^{-1}x$, $\tau = \epsilon^{-\alpha}t$, $\alpha \in [1, 2]$ bestehen resultieren die Navier-Stokes- bzw. Euler-gleichungen aus dem Grenzwert $\epsilon \longrightarrow 0$ der skalierten Boltzmanngleichung

konstruiere math.Zusammenhang zwischen der Lösung f der Boltzmanngleichung und der Lösung U des ursprünglichen Problems (hier: $u_t + f(u)_x = 0$) mittels Nebenbedingung

$$m(x, v, t) = \mu(u(x, t), v)$$

$\rightsquigarrow$ *Probleme* :

1. Bestimmung der Nebenbedingung μ
2. Bestimmung von u aus m
   $\rightsquigarrow$ Lösungen ergeben sich als Momente der Dichte m

ein einfaches Beispiel

skalarer Advektionsprozeß

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$u(0,x) = u^0(x), t \geq 0, x \in \mathbb{R}$$

Lösung $u(t,x) = u^0(x - at)$

kinetische Formulierung

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$f(0,v,x) = u^0(x)\delta(v - a)$$

Lösung $f(t,v,x) = u^0(x - vt)\delta(v - a) = u^0(x - at)\delta(v - a)$

Entropie

Definition: Entropie/Entropie-Fluß-Paar zu $u_t + f(u)_x = 0$

Ein Entropie-Fluß-Paar n-ter Ordnung ist ein Paar von Funktionen (U,F)$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$, welches

$$\nabla F^T = \nabla U^T \nabla f^n$$

erfüllt

Somit lässt sich $u_t + f(u)_x = 0$ als Entropieerhaltungsgesetz $U_t + F_x = 0$ mit zugehöriger kinetischer Formulierung:

$$f_t + vf_x = 0, f(0,x,v) = \mu_\eta(u^0(x), v)$$

interpretieren.
(Lösung $U(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \mu_\eta(u^0(x - vt))dv$)

Nebenbedingung

$\rightsquigarrow$ neues Ziel:
finde μ_η, so daß $\eta(u(\Delta t, x)) - U(\Delta t, x) = O(\Delta t^{n+1})$

1. für skalare Erhaltungsgesetze und lineare Systeme existieren exakte Nebenbedingungen ($n = \infty$)
2. für Systeme von Erhaltungsgleichungen gilt: Nebenbedingungen der Ordnung n gibt es genau dann, wenn U eine Entropie n-ter Ordnung ist
3. für $u \in \mathbb{R}^2$ gilt $n = 1$ oder $n = \infty$
4. $n \geq 1$

linearer Fall

Betrachte

$$u_t + au_x = 0, u(0,x) = u^0(x)$$

Fouriertransformation in Ortskoordinaten ergibt:

$$\hat{u}_t + isa\hat{u} = 0$$

$$\hat{u}(0,s) = \hat{u}^0(s)$$

mit Lösung

$$\hat{u}(t,x) = \hat{E}_t \hat{u}^0(s)$$

$$\hat{E}_t(s) = exp(itsa)$$

linearer Fall

Somit ist die Lösung des ursprünglichen linearen Problems gegeben durch

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} E_t(y) u^0(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}} E_1(v) u^0(x-tv) dv$$

Dies motiviert die Einführung der Nebenbedingung
$\mu(u,v) = E_1(v)u$
Desweiteren gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} \mu dv = u$$

$$\int_{\mathbb{R}} v\mu dv = au$$

nichtlinearer Fall

Betrachte Erhaltungsgesetz $u_t + f(u)_x = 0$

$$\mu(u) = \int_{\Gamma_u} E = \int_0^1 E(\gamma(u,s))\dot{\gamma}(u,s)ds$$

$$E(u) = \mathfrak{F}_s{}^{-1}(exp(-is\nabla f(u)))$$

bzw. für Entropie-Erhaltungsgesetzte $U_t + F_x = 0$:

$$\mu(U) = \int_{\Gamma_U} \nabla^T UE = \int_0^1 \nabla^T U(\gamma(u,s))E(\gamma(u,s))\dot{\gamma}(u,s)ds$$

mit Γ_u Weg vom Ursprung nach u
Es lässt sich zeigen, daß auf diese Weise definierte Nebenbedingungen optimal bzgl. der Konsistenzordnung sind.

Konsistenz

Im Falle skalarer Gleichungen und falls $\oint E = 0$ lässt sich lineare Stabilität zeigen.
Aus der Konvexität des Definitionsbereichs von E folgt $\oint E = 0$

$$\iff$$

E besitzt ein Potential

$$\iff$$

E besitzt eine Stammfunktion

$$\iff$$

$(s\nabla f(u))^n$ besitzt eine Stammfunktion $\forall n \in \mathbb{N}$

Inhaltsverzeichnis

Ansatz

Savage-Hutter-Gleichungen

$$\partial_t h + \partial_x(hu) = 0$$
$$\partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \beta\frac{h^2}{2}) = g(u)h$$

$$\beta = \epsilon k_{actpass} cos\zeta$$
$$g(u) = sin\zeta - sgn(u)cos\zeta tan\delta, u \neq 0$$

Ansatz

Ansatz für Dichte M(x,v,t)=M(h,v-u):

$$h = \int_{\mathbb{R}} M(h, v-u)dv$$

$$hu = \int_{\mathbb{R}} vM(h, v-u)dv$$

$$hu^2 + \beta\frac{h^2}{2} = \int_{\mathbb{R}} v^2 M(h, v-u)dv$$

(semi-)kinetische Formulierung

$\rightsquigarrow$ (h,hu) ist Lösung der Savage-Hutter-Gleichungen gdw. M(h,v-u) Lösung ist von

$$\partial_t M(h, v-u) + v\partial_x M(h, v-u) + g(u)\partial_v M(h, v-u) = Q(x, v, t)$$

wobei für Q gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} Q dv = 0$$

und

$$\int_{\mathbb{R}} vQ dv = 0$$

(semi-)kinetische Formulierung

Eigenschaften des resultierenden FV-Schemas:

1. gültig nur für $\zeta = \text{const.}$
2. Vernachlässigung von Q ermöglicht i.A. für hyperbolische System noch Konstruktion von Verfahren erster Ordnung

(semi-)kinetische Formulierung

Eigenschaften des resultierenden FV-Schemas:

1. gültig nur für $\zeta = \text{const.}$
2. Vernachlässigung von Q ermöglicht i.A. für hyperbolische System noch Konstruktion von Verfahren erster Ordnung
3. Schema garantiert $h > 0$ und somit Hyperbolizität der Gleichungen

(semi-)kinetische Formulierung

Eigenschaften des resultierenden FV-Schemas:

1. gültig nur für $\zeta = \text{const.}$
2. Vernachlässigung von Q ermöglicht i.A. für hyperbolische System noch Konstruktion von Verfahren erster Ordnung
3. Schema garantiert $h > 0$ und somit Hyperbolizität der Gleichungen
4. konservativ für h

(semi-)kinetische Formulierung

Eigenschaften des resultierenden FV-Schemas:

1. gültig nur für $\zeta = \text{const.}$
2. Vernachlässigung von Q ermöglicht i.A. für hyperbolische System noch Konstruktion von Verfahren erster Ordnung
3. Schema garantiert $h > 0$ und somit Hyperbolizität der Gleichungen
4. konservativ für h
5. verallgemeinerbar auf 2 Dimensionen und höhere Ordnungen

(semi-)kinetische Formulierung

Eigenschaften des resultierenden FV-Schemas:

1. gültig nur für $\zeta = \text{const.}$
2. Vernachlässigung von Q ermöglicht i.A. für hyperbolische System noch Konstruktion von Verfahren erster Ordnung
3. Schema garantiert $h > 0$ und somit Hyperbolizität der Gleichungen
4. konservativ für h
5. verallgemeinerbar auf 2 Dimensionen und höhere Ordnungen
6. Lawinenbewegung komplett simulierbar (incl. Start/Stop)

(semi-)kinetische Formulierung

Eigenschaften des resultierenden FV-Schemas:

1. gültig nur für $\zeta = \text{const.}$
2. Vernachlässigung von Q ermöglicht i.A. für hyperbolische System noch Konstruktion von Verfahren erster Ordnung
3. Schema garantiert $h > 0$ und somit Hyperbolizität der Gleichungen
4. konservativ für h
5. verallgemeinerbar auf 2 Dimensionen und höhere Ordnungen
6. Lawinenbewegung komplett simulierbar (incl. Start/Stop)
7. besteht aus 2 Schemas, einem zur Beschreibung der Bewegung bei hoher Geschwindigkeit und einer Modifikation welche stationäre Zustände erkennen kann

(semi-)kinetische Formulierung

Eigenschaften des resultierenden FV-Schemas:

1. gültig nur für $\zeta = \text{const.}$
2. Vernachlässigung von Q ermöglicht i.A. für hyperbolische System noch Konstruktion von Verfahren erster Ordnung
3. Schema garantiert $h > 0$ und somit Hyperbolizität der Gleichungen
4. konservativ für h
5. verallgemeinerbar auf 2 Dimensionen und höhere Ordnungen
6. Lawinenbewegung komplett simulierbar (incl. Start/Stop)
7. besteht aus 2 Schemas, einem zur Beschreibung der Bewegung bei hoher Geschwindigkeit und einer Modifikation welche stationäre Zustände erkennen kann

Inhaltsverzeichnis

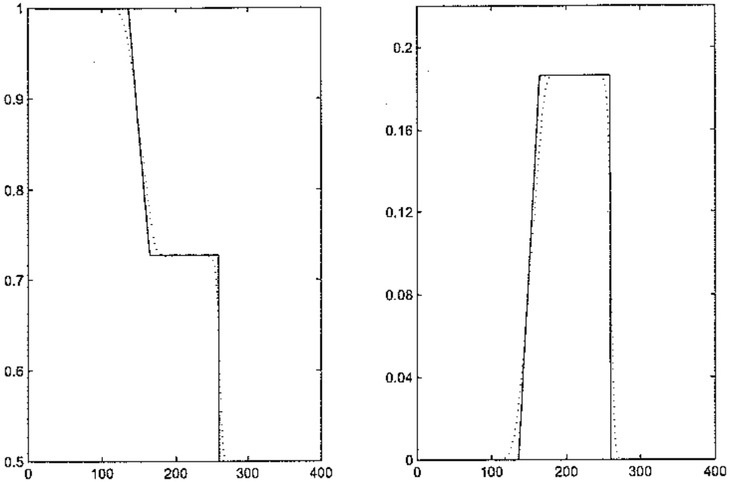
Beispiel 1

In allen, bis auf dem letzten, der folgenden Beispiele wrde $\epsilon = 0.4$, $\Delta x = 0.05$ und $\Delta t = 0.001$ gewählt.
Betrachte Savage-Hutter-Gleichungen mit $\zeta = \delta = 0$ und Anfangsdaten

$$h(0,x) = \begin{cases} 1 & x \leq x_0 \\ 0.5 & x > x_0 \end{cases} \tag{1}$$

$$u(0,x) = 0$$

Beispiel 1 (5000 Zeitschritte)



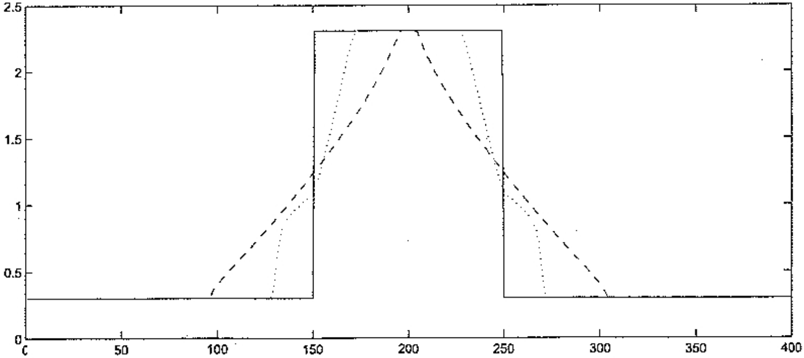
Beispiel 2

Betrachte Savage-Hutter-Gleichungen mit $\zeta = 0$, $\delta = \frac{\pi}{10}$ und Anfangsdaten

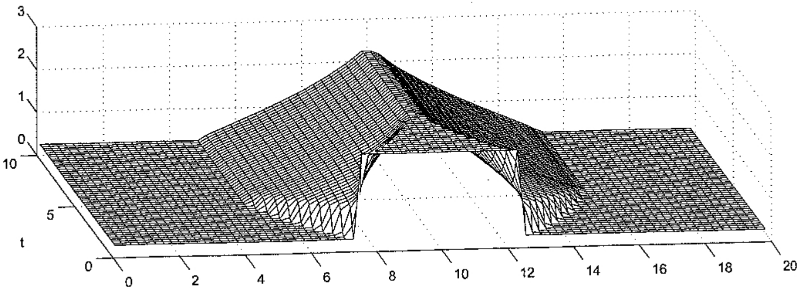
$$h(0,x) = \begin{cases} 0.3 & x \leq x_1 \\ 2.3 & x_1 < x < x_2 \\ 0.3 & x > x_2 \end{cases} \qquad (2)$$

$$u(0,x) = 0$$

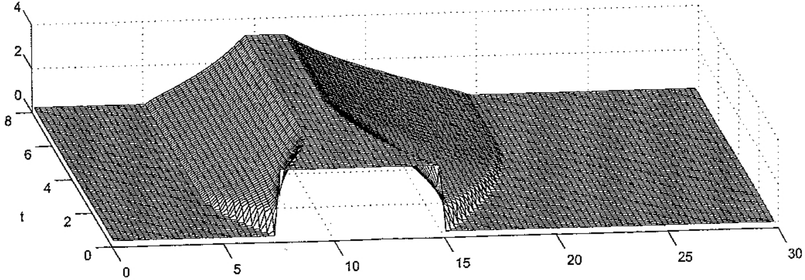
Beispiel 2



Beispiel 2



Beispiel 2 ($\zeta = \frac{\pi}{15}$, $\delta = \frac{\pi}{5}$)



Beispiel 3

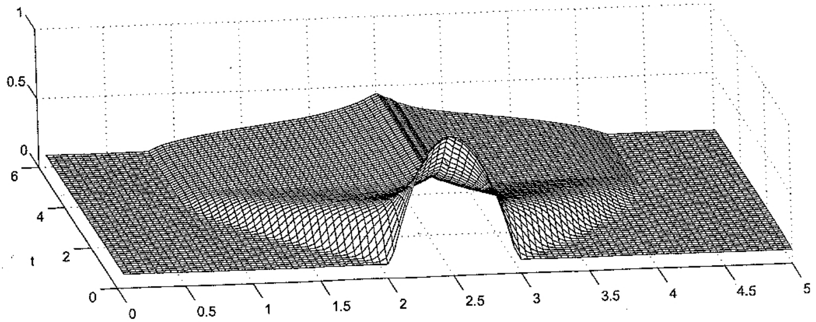
Betrachte Savage-Hutter-Gleichungen mit $\zeta = 0$, $\delta = \frac{\pi}{15}$ und Anfangsdaten

$$h(0,x) = max(K/10, K - l(x - x_0)^2) \tag{3}$$

$$u(0,x) = 0$$

$$K = 1, \ \ l = 4$$

Beispiel 3



Beispiel 4

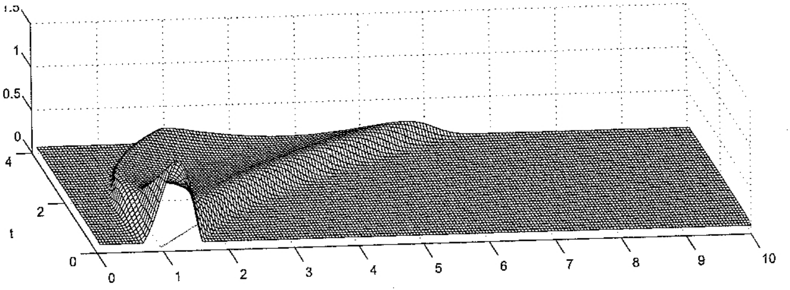
Betrachte Savage-Hutter-Gleichungen mit $\zeta = \delta = 0$ und Anfangsdaten

$$h(0,x) = \begin{cases} max(0.9sin[\pi(x-0.6)] - 0.3sin[2\pi(x-0.6), 1]) & 0.6 < x < \\ 0.1 & \text{sonst} \end{cases} \tag{4}$$

$$u(0,x) = 0$$

$$\epsilon = 0.3218,\ \zeta = 30,\ \delta = 10$$

Beispiel 3



Inhaltsverzeichnis

Quellen

1. Michael Junk, A kinetic approach to hyperbolic systems and the role of higher order entropies
2. Michael Junk (2000), A new perspective on kinetic schemes, SIAM J. NUMER. ANAL., Vol 38, No. 5, pp. 1603-1625
3. Christine Kaland and Jens Struckmeier (2007), A kinetic scheme for the Savage-Hutter equations, Hamburger Beiträge zur Angewandten Mathematik
4. Cercignani, C., Illner, R., Pulvirenti, M. (1994), The mathematical theory of dilute gases, Springer

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit!

Fragen?