Nichtlineare Luftwiderstands-Modell

2. Teil

Lineares Modell

1. Freier Fall (k=k1)
2. Eröffnung des Schirms(k=k2)

Quadratisches Modell

1. Freier Fall
2. Eröffnung mit Zugleine
3. Eröffnung des Fallschirms
4. Aufblasen des Fallschirms
5. Steady-state-Bereich

Lineares Modell

1.Freier Fall (k=k1)

$$v' = -\frac{k_1}{m} - g \qquad v(0)=0 \qquad \forall \quad t \in [0, t_0)$$

Finden eines Integrationsfaktor und multiplizieren

$$u = e^{-\int -k_1/m \, \mathrm{dt}} = e^{k_1 t/m}$$

$$e^{k_1 t/m} v' + \frac{k_1}{m} e^{k_1 t/m} v = -\mathrm{g} e^{k_1 t/m}$$

Integrieren beide Seite

$$\Rightarrow \qquad e^{k_1 t/m} v = -\frac{\mathrm{mg}}{k_1} e^{k_1 t/m} + c$$

Einsetzen von Anfangsbedingung v(0)=0

$$\Rightarrow c = \frac{\mathrm{mg}}{k_1}$$

Geschwindigkeitsfunktion

$$v(t)=\frac{\mathrm{mg}}{k_1}\left(e^{-k_1 t/m}-1\right)$$

Stammfunktion

$$y(t)=\int v(t)\,\mathrm{dt}=\int \frac{\mathrm{mg}}{k_1}\left(e^{-k_1 t/m}-1\right)$$

$$y(0)=y_0$$

$$c=y_0+\frac{m^2 g}{k_1^2}$$

$$y(t)=y_0-\frac{\mathrm{mg}}{k_1}t-\frac{m^2 g}{k_1^2}\left(e^{-k_1 t/m}-1\right)$$

Schirmöffnung(k=k2)

$$v' = -\frac{k_2}{m} v - g \qquad v(t_0) = \frac{\mathrm{mg}}{k_1}\left(e^{-k_1 t / m} - 1\right) \qquad t \geq t_0$$

Finden einen Integrationsfaktor und multiplizieren

$$u = e^{-\int -k_2/m \, \mathrm{dt}} = e^{k_2 t / m}$$

$$e^{k_2 t / m} \mathrm{v}' + \frac{k_2}{m} e^{k_2 t / m} v = -\mathrm{g} e^{k_2 t / m}$$

Integrieren die beiden Seiten

$$e^{k_2 t / m} v = -\frac{\mathrm{mg}}{k_2} e^{k_2 t / m} + c$$

$$v(t) = -\frac{\mathrm{mg}}{k_2} + \mathrm{c} e^{k_2 t / m}$$

Die Geschwindigkeiten ist gleich auf den Zeitpunkt kurz vor und nach t0

$$\frac{\mathrm{mg}}{k_1}(e^{-k_1 t_0/m}-1)=-\frac{\mathrm{mg}}{k_2}+\mathrm{ce}^{-k_2 t_0/m}$$

$$\Longrightarrow \quad c=\frac{\mathrm{mg}}{k_2}e^{-k_2 t_0/m}+\frac{\mathrm{mg}}{k_1}e^{k_2 t_0/m}(e^{-k_1 t_0/m}-1)$$

$$\Longrightarrow v(t)=\frac{\mathrm{mg}}{k_2}(e^{k_2(t_0-t)/m}-1)+\frac{\mathrm{mg}}{k_1}(e^{k_2(t_0-t)/m})(e^{-k_1 t_0/m}-1) \quad t\geq t_0$$

Die Beschleunigung

$$a=v'(t)=(-1-\frac{k_2}{k_1})g(e^{-k_2(t-t_0)/m})$$

$$\lim_{t\to t_0} a=\lim_{t\to t_0}(-1-\frac{k_2}{k_1})g(e^{-k_2(t-t_0)/m})=-(1+\frac{k_2}{k_1})g$$

Quadratisches Modell

Reynolds Number (Re)

$$\mathrm{Re} = \frac{\ell\, \mathrm{dv}}{\mu}$$

Wobei v die Geschwindigkeit

d die Länge des Anwendungsfalls

ℓ die Dichte

μ die Viskosität

Re als das Kriterium zur Bestimmung vom Zusammenhang zwischen den Luftwiderstand und Geschwindigkeit

Der Luftwiderstand ist linear in Geschwindigkeit ,wenn $\mathrm{Re} < 1$

Der Luftwiderstand ist quadratisch in Geschwindigkeit, wenn $\mathrm{Re} > 10^3$

Die Dichte und Viskosität sind konstant in einer geeigneten Höhe

$$\ell \approx 1\mathrm{kg/m^3} \qquad \mu \approx 1.5\times 10^{-5}\mathrm{kg/m/s}$$

Die Geschwindigkeit bevor und nach dem Öffnung des Schirms ist

$$v \approx 45\mathrm{m/s} \qquad v_n \approx 5.3\mathrm{m/s}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{Re} > 10^3$$

Luftwiderstand

$$F_w = \frac{1}{2}\left(C_w A \ell v^2\right)$$

Wobei C_w Koeffizient vom Luftwiderstand

ℓ die Dichte der Luft

A die Querschnittfläche

v die Geschwindigkeit

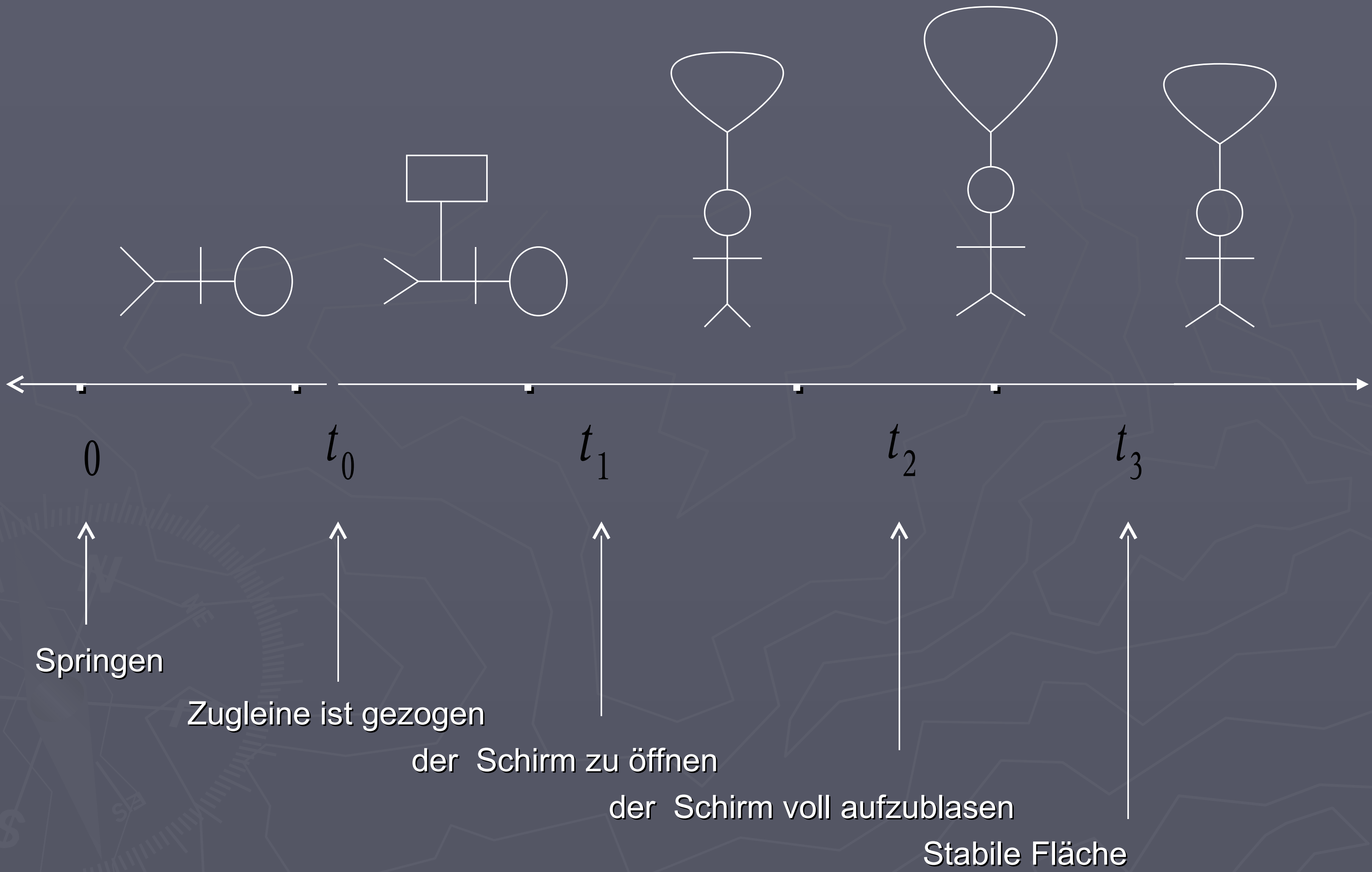
Der gesamte Luftwiderstand besteht aus dem Luftwiderstand

von Springer und Ausrüstung.

$$F_w = F_w^b + F_w^a$$

$$= \frac{1}{2}\ell \left(C_w^b A^b + C_w^a A^a \right) v^2$$

Der Koeffizient und die Querschnittsflächen sind nicht konstant



0
t_0
t_1
t_2
t_3
Springen
Zugleine ist gezogen
der Schirm zu öffnen
der Schirm voll aufzublasen
Stabile Fläche

Parameter für das typische Fallschirmspringen

a_1	b_0	b_1	h	l	m	t_0	t_1	t_2	t_3
$43.8\mathrm{m}^2$	$0.5\mathrm{m}^2$	$0.1\mathrm{m}^2$	$1.78\,m$	$8.96\,m$	$97.2\,kg$	$10\,s$	$10.5\mathrm{s}$	$11.5\mathrm{s}$	$13.2\mathrm{s}$

$$\mathrm{mv}' = -\mathrm{mg} + \mathrm{kv}^2 \qquad v(0) = 0$$

Wobei

$$k = \frac{1}{2}\ell\left(C_w^b A_w^b + C_w^a A_w^a\right)$$

$$k = \frac{1}{2}\ell \begin{cases} 1.95\mathrm{b}_0 & t \le t_0 \\ 1.95\mathrm{b}_0 + 0.35\mathrm{b}_1 l \dfrac{t - t_0}{t_1 - t_0} & t_0 < t \le t_1 \\ 0.35\mathrm{b}_1 h + 1.33\mathrm{A}_{1,2}^a(t) & t_1 < t \le t_2 \\ 0.35\mathrm{b}_1 h + 1.33\mathrm{A}_{1,2}^a(t) & t_2 < t \le t_3 \\ 0.35\mathrm{b}_1 h + 1.33\mathrm{a}_1 & t > t_3 \end{cases}$$