

Tacoma-Narrows-Brücke

A black and white photograph of the Tacoma Narrows Bridge, showing its suspension towers and cables. The bridge is crowded with people and cars, and the surrounding landscape is visible in the background.

3. Teil:

Numerische Modellierung

Saskia Zurth

Susann Mühlwald

Martin Fincke

Ablauf

- 1. Rückblick
- 2. Vertikales Modell
- 3. Torsionales Modell
 - 3.1 Allgemeine Theorie
 - 3.1.1 Gradienten-Verfahren
 - 3.1.2 Newton-Verfahren
 - 3.2 Nichtlineare DGL
 - 3.3 Linearisierte DGL
- 4. Kabelermüdung
- 5. Schlussfolgerung

1. Rückblick

- **Allgemeine DGL für Brückenquerschnitt:**

$$\ddot{\theta} = -\delta\dot{\theta} - \frac{6k}{m}\cos\theta\sin\theta + \lambda\sin(\mu t)$$

$$\ddot{y} = -\delta\dot{y} - \frac{2k}{m}y + g$$

- **Konstanten:**

$$\delta = 0.01$$

$$\mu \in [1.2, 1.6]$$

$$m = 2500\text{kg/ft}$$

Berechnung von K: (Hooksche Gesetz)

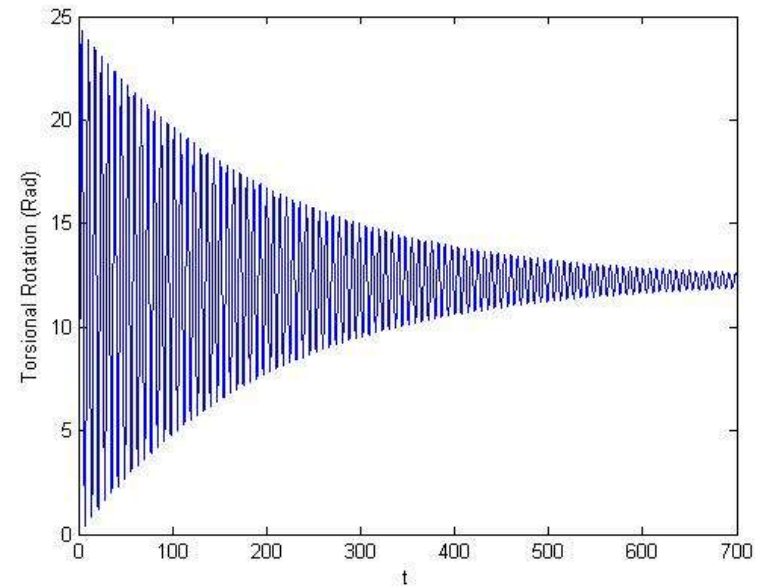
$$2Ky = mg \quad y(\text{Auslenkung}) \quad m(\text{Beschwerung}) \quad g(\text{Erdbeschleunigung})$$

$$2K(0.5m) = (100\text{kg})(9.8\text{m/s}^2)$$

$$K \approx 1000 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$$

2. Vertikales Modell

$$\ddot{y} = -\delta\dot{y} - \frac{2k}{m}y + g$$



3. Torsionales Modell

$$\ddot{\theta} = -\delta\dot{\theta} - \frac{6k}{m}\cos\theta\sin\theta + \lambda\sin(\mu t)$$

Reduktion der Ordnung:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$u' = v$$

$$v' = -0.01v - 2.4\cos u \sin u + \lambda \sin \mu t$$

3. Torsionales Modell

Bestimmung der Anfangsbedingung (c,d)

- Runge-Kutta-Verfahren (initial value solver)
- Fehlerminimierung
 - Gradienten-Verfahren
 - Newton's Methode

3.1 Allgemeine Theorie

- Finde T ($2\pi/\mu$) – Periodische Lösung y der nichtlinearen torsionalen DGL für die gilt:

$$y(T) = c$$

$$\dot{y}(T) = d$$

für beliebigen Startvektor (c, d)

- Minimiere quadratischen Fehler

$$E(c, d) = (c - y(T))^2 + (d - y'(T))^2$$

3.1.1 Gradienten-Verfahren

- Wende Gradientenverfahren an:

$$\begin{bmatrix} c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_n \\ d_n \end{bmatrix} - \epsilon \frac{\nabla E}{\|\nabla E\|}$$

- Berechne: ∇E und $\|\nabla E\|$

$$\nabla E = \left(\frac{\partial E}{\partial c}, \frac{\partial E}{\partial d} \right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial c} = 2(c - y(T)) \left(1 - \frac{\partial y}{\partial c}(T) \right) + 2(d - y'(T)) \left(- \left(\frac{\partial y}{\partial c} \right)'(T) \right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial d} = 2(c - y(T)) \left(- \frac{\partial y}{\partial d}(T) \right) + 2(d - y'(T)) \left(1 - \left(\frac{\partial y}{\partial d} \right)'(T) \right)$$

3.1.1 Gradienten-Verfahren

- Partielle Ableitungen, approximiert durch den Differenzenquotienten:

$$\frac{\partial y}{\partial c}(T) = \frac{y(c+h, d) - y(c-h, d)}{2h} \quad \left| \quad \left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)'(T) = \frac{y'(c+h, d) - y'(c-h, d)}{2h}$$

$$\frac{\partial y}{\partial d}(T) = \frac{y(c, d+h) - y(c, d-h)}{2h} \quad \left| \quad \left(\frac{\partial y}{\partial d}\right)'(T) = \frac{y'(c, d+h) - y'(c, d-h)}{2h}$$

- Normiert:

$$\|\nabla E\| = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial c}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial d}\right)^2}$$

3.1.1 Newtonverfahren

- Newton's Methode
 - Verfeinerung des Ergebnisses vom Gradientenverfahren

- Neue Fehlerfunktion:

$$F \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y(T) \\ y'(T) \end{bmatrix}$$

- Newton ergibt:

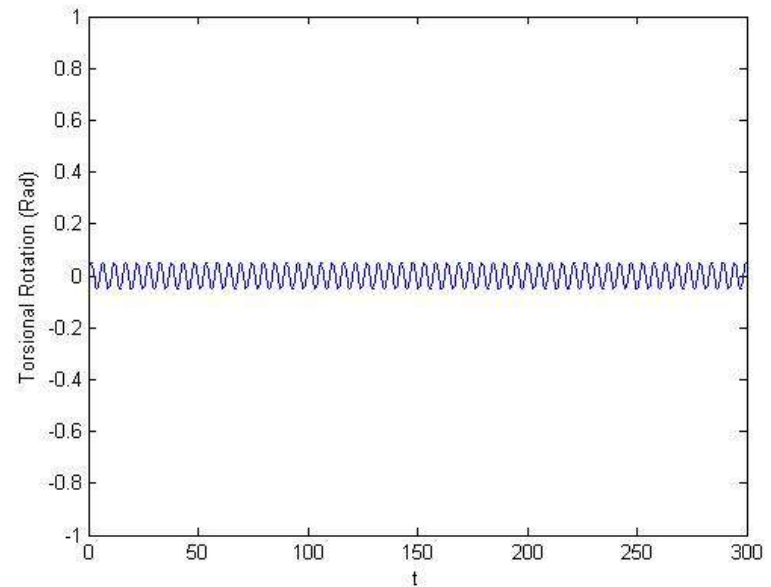
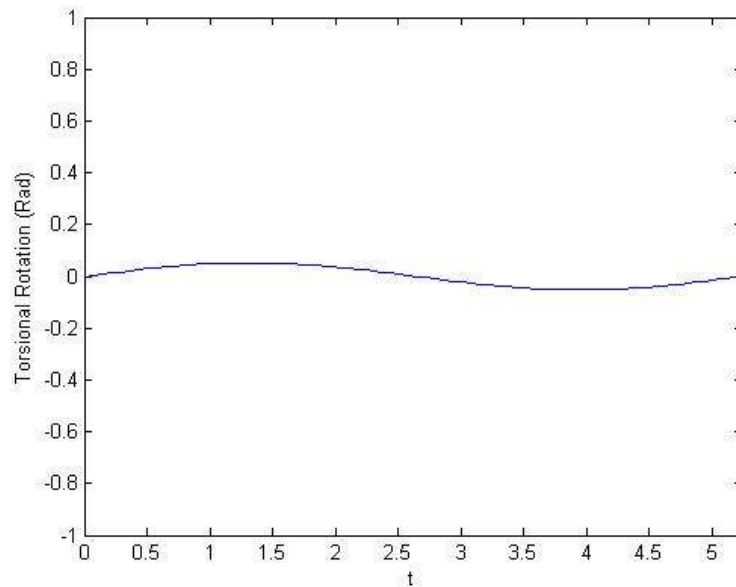
$$\begin{bmatrix} c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_n \\ d_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 - \frac{\partial y}{\partial c} & -\frac{\partial y}{\partial d} \\ -\left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)' & 1 - \left(\frac{\partial y}{\partial d}\right)' \end{bmatrix}^{-1} F \begin{bmatrix} c_n \\ d_n \end{bmatrix}$$

3.2 Nichtlineare DGL

$$(c,d) = (0.0007, 0.0627)$$

$$\mu=1.2$$

$$\lambda=0.05$$

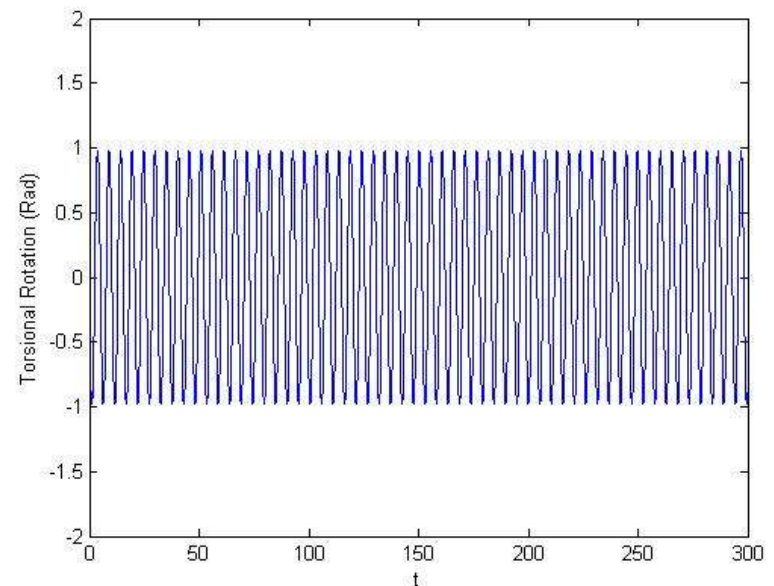
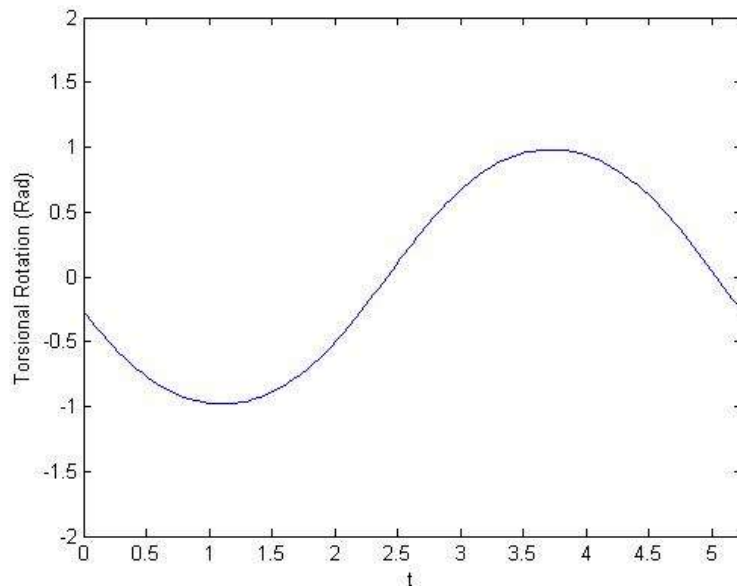


3.2 Nichtlineare DGL

$$(c,d) = (-0.2626, -1.2410)$$

$$\mu=1.2$$

$$\lambda=0.05$$

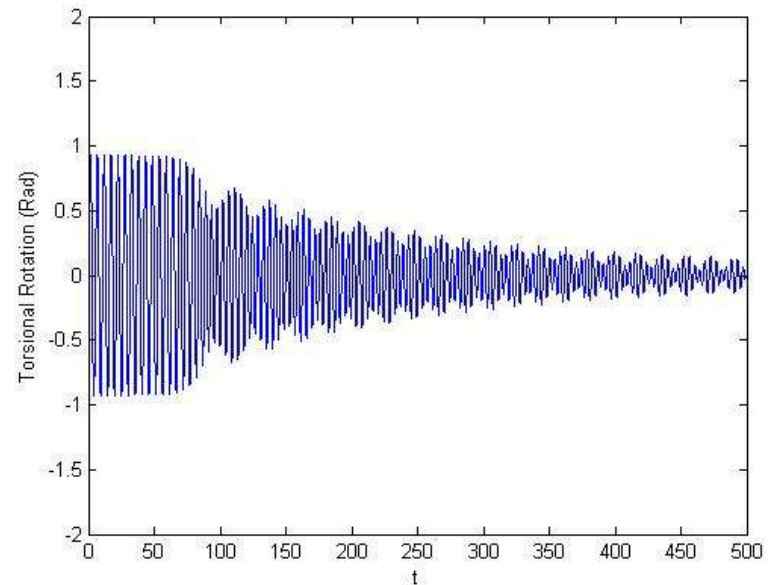
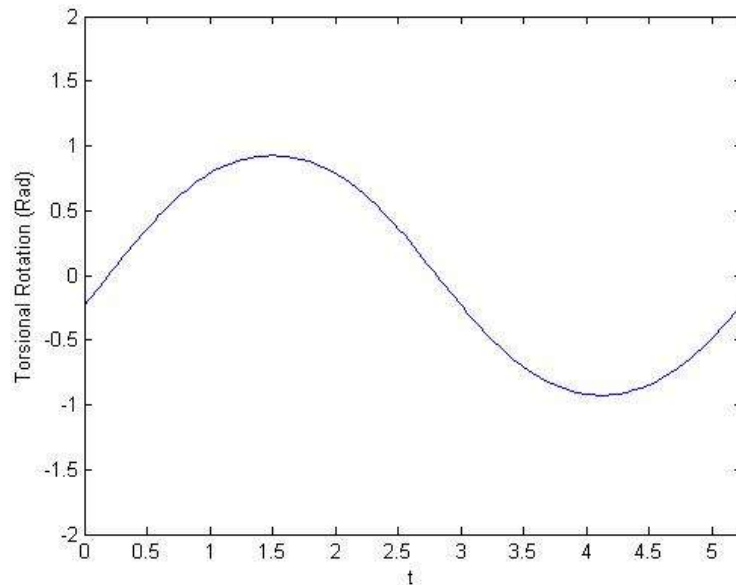


3.2 Nichtlineare DGL

$$(c,d) = (-0.2304, 1.1681)$$

$$\mu=1.2$$

$$\lambda=0.05$$



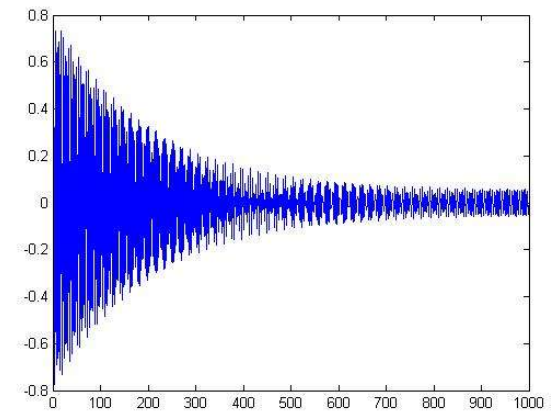
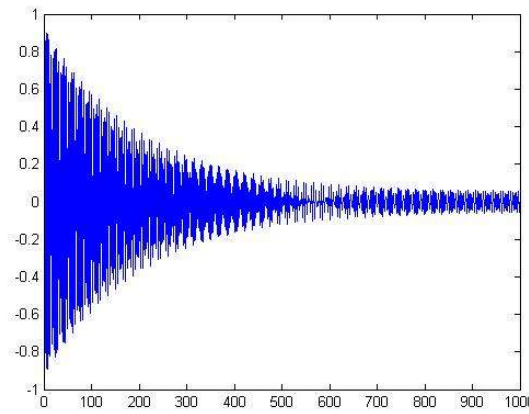
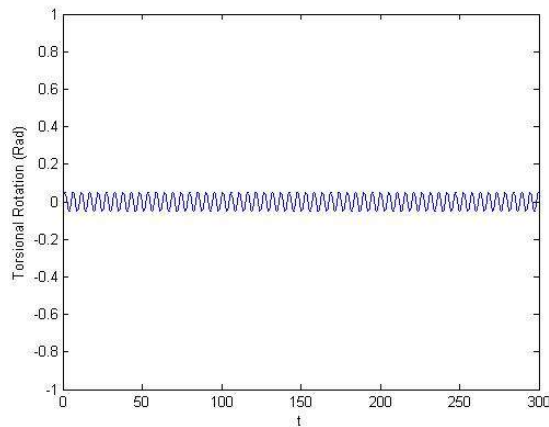
3.3 Linearisierte DGL

$$\ddot{\theta} = -0.01\dot{\theta} - 2,4\theta + 0.05\sin(\mu t)$$

1.) (c,d) = (0.0007, 0.0627)

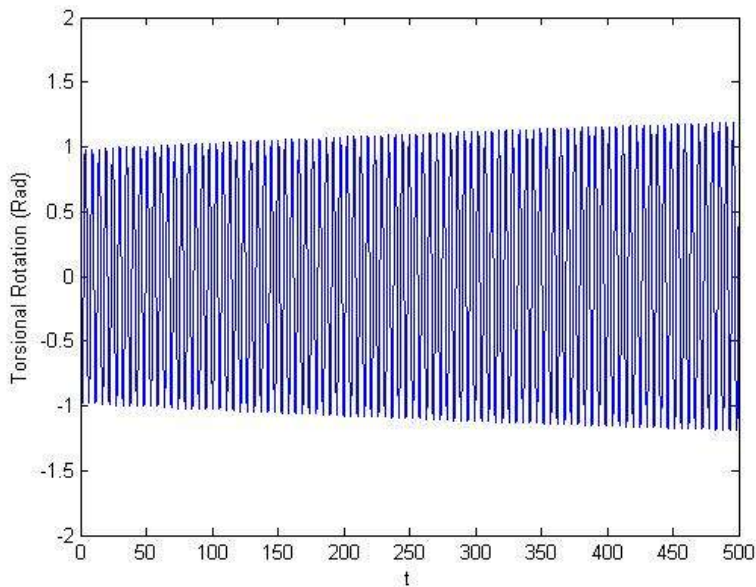
2.) (c,d) = (-0.2626, -1.241)

3.) (c,d) = (-0.2304, 1.1681)



4. Kabelermüdung

$$\ddot{\theta} = -0.01\dot{\theta} - \left(2,4 + \frac{t^b}{w}\right) \cos\theta \sin\theta + 0.05 \sin(\mu t)$$



5. Schlussfolgerung

- **Lineare DGL:**
 - Konvergiert gegen kleinamplitudige Lösung (für unterschiedliche Initialwerte (c,d))
- **Nichtlineare DGL:**
 - Zwei weitere Lösungen gefunden, deren Amplitude (zwischen -1 und 1) dem beobachtetem Verhalten der Brücke entspricht
 - Sensibel für Änderung der Initialwerte bei gleichbleibender externer Belastung

Quellenangaben

- P.J. McKenna
„Large Torsional Oscillations in Suspension Bridges Revisited: Fixing an Old Approximation“
- Matt Bates und Sean Donohoe
„Tacoma Narrows Bridge“ 2003
- Ken Huffman
„Tacoma Narrows and the gradient vector“ 2005
- Brian A. Fillenwarth
“Improving the Mathematical Model of the Tacoma Narrows Bridge”