

Technische Universität Berlin
Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften



Analytische und numerische Lösung
der Black-Scholes-Gleichung für
europäische und amerikanische
Basket-Optionen

Diplomarbeit
in Wirtschaftsmathematik

bei Herrn Priv.-Doz. Dr. Matthias Ehrhardt
am Institut für Mathematik
vorgelegt von

Anja Würfel

Berlin, Februar 2007

Die selbstständige und eigenhändige Anfertigung versichere ich an Eides statt.

Ort, Datum

Unterschrift des Verfassers

Zusammenfassung

Eine Option stellt einen Vertrag zwischen zwei Parteien dar, der ihrem Halter das Recht, aber nicht die Verpflichtung, gibt, zu einem bestimmten Zeitpunkt eine Transaktion zu einem bereits bei Vertragsabschluss festgelegten Preis durchzuführen. Hierbei muss unterschieden werden, ob es sich bei der Transaktion um einen Kauf (Call-Option) oder einen Verkauf (Put-Option) des zugrundeliegenden Objektes (*underlying*) handelt. Der sogenannte Basiswert, auf den sich die Option bezieht, kann eine Aktie, ein Index, eine Fremdwährung, ein Rohstoff, ein Terminkontrakt usw. sein. Des Weiteren trennt man zwischen den Optionen, die nur zum Verfallszeitpunkt ausgeübt werden dürfen (europäische Optionen) und den Optionen, bei denen der Inhaber sein Ausübungsrecht zu jedem beliebigen Zeitpunkt vor ihrer Fälligkeit wahrnehmen kann (amerikanische Optionen). Die Bezeichnungsweise hat sich in der Vergangenheit entwickelt und hängt nicht davon ab, wo die betreffenden Derivate gehandelt werden. Diese Optionsformen gehören zu den Standardoptionen (*plain vanilla options*).

Aus der Definition können wir schließen, dass eine Option ihrem Besitzer eine nicht-negative Zahlung zusichert, die in ihrer Höhe unsicher ist. Da es also im schlimmsten Fall zu keinem Gewinn kommen kann, ist verständlich, dass man für den Erwerb einer Option eine Zahlung, die Optionsprämie, leisten muss. Die Ermittlung dieser ist aufgrund der unbekanntenen Höhe des erzielbaren Gewinns nicht so einfach.

Die Bewertung von amerikanischen Optionen ist gegenüber europäischen Optionen interessanter, da neben dem Preis auch noch der bestmögliche Ausübungszeitpunkt ermittelt werden muss. Außerdem stellen die europäischen Optionen einen Spezialfall der amerikanischen Optionen dar, wenn diese bis zum Laufzeitende gehalten werden.

Neben den bisher betrachteten Optionen, die genau einen Basiswert berücksichtigen, gibt es auch Finanzderivate, die sich auf ein Paket aus mehreren Basiswerten beziehen. Diese Optionen gewinnen in der Finanzwelt zunehmend an Bedeutung und werden *Basket-Optionen* genannt. Sie haben den großen Vorteil, dass durch die Verknüpfung unabhängiger Basiswerte das Risiko gestreut wird und nur einmal eine Optionsprämie sowie Transaktionskosten fällig werden. Allerdings erschwert diese Zusammensetzung ihre Bewertung massiv und hat dazu geführt, dass sich ein neues Forschungsgebiet in der Finanzmathematik entwickelt hat, welches sich mit der numerischen Lösung von Basket-Optionen befasst. Die Bewertung dieser Derivate erfolgt vorwiegend über die Monte-Carlo Methode, doch R. Panini und R. P. Srivastav [24] sowie Jódar et al. [17] haben unabhängig voneinander eine alternative Methode entwickelt. Jódar et al. zeigten theoretisch wie man die Black-Scholes-Gleichung mit Hilfe der Mellin-Transformation lösen kann, wohingegen R. Panini und R. P. Srivastav bereits den

Wert von Basket-Optionen mit Hilfe der Black-Scholes-Gleichung unter Anwendung der Mellin-Transformation ermittelten. Dabei konzentrierten sie sich auf europäische Basket-Optionen, die aus zwei Basiswerten bestehen und keine Dividendenzahlungen zulassen. Im selben Jahr veröffentlichte Panini seine Dissertation [25], in der er auch amerikanische Basket-Optionen mit zwei Basiswerten, auf die keine Dividenden gezahlt werden, betrachtete.

Wir wollen in dieser Arbeit diese Ideen verallgemeinern und sie auf Basket-Optionen mit einer beliebigen Anzahl von Basiswerten, die zudem auch noch Dividendenzahlungen berücksichtigen, erweitern.

Die Diplomarbeit ist wie folgt strukturiert: Im ersten Teil geben wir eine allgemeine Einführung in die Optionspreistheorie und gehen auf die herkömmlichen Lösungsmethoden von europäischen und amerikanischen Optionen ein. Bei den amerikanischen Optionen geben wir einen Überblick von verschiedenen numerischen Lösungsmethoden. Danach zeigen wir eine Grundlage zur Preisbestimmung von Basket-Optionen auf und stellen verschiedene bereits existierende Lösungsmechanismen kurz vor.

Im zweiten Teil dieser Arbeit geht es um die analytische Lösung von europäischen und amerikanischen Basket-Optionen, wobei wir uns auf Put-Basket-Optionen mit Dividendenzahlungen beschränken werden. Die Call-Basket-Optionen können analog hergeleitet werden. Wir lösen die mehrdimensionale Black-Scholes-Gleichung unter Zuhilfenahme der mehrdimensionalen Mellin-Transformation. Diese Herleitung der Preisfunktionen erfolgt schrittweise: Wir starten zunächst im Kapitel 5 mit den einfachen europäischen und amerikanischen Put-Optionen, wobei wir die Äquivalenz zu den herkömmlichen Lösungsmethoden aus Teil I zeigen. Danach nehmen wir in Kapitel 6 die Preisbestimmung bezüglich Put-Basket-Optionen für zwei Basiswerte und darauffolgend für beliebig viele Basiswerte vor.

Die numerische Auswertung der in Teil II gefundenen Lösungsformeln führen wir im dritten Teil der Diplomarbeit durch. Bevor wir die europäischen und amerikanischen Basket-Optionen numerisch lösen werden, beginnen wir mit dem amerikanischen Put. Die erhaltenen Ergebnisse vergleichen wir zur Verdeutlichung der Genauigkeit mit anderen numerischen Verfahren, wie zum Beispiel der Monte-Carlo Methode.

Zum Abschluss werden wir noch einen Ausblick geben, der weitere Entwicklungen dieser Methode aufzeigen soll, um sie in der Praxis einsetzen zu können.

An dieser Stelle möchte ich all jenen danken, die mir mit ihrer fachlichen und persönlichen Anteilnahme beim Gelingen meiner Diplomarbeit halfen.

Allen voran Herrn Priv.-Doz. Dr. Matthias Ehrhardt für die Überlassung des Themas und die hervorragende Betreuung sowie für die zahlreichen wissenschaftlichen Ratschläge, die sehr zur Weiterführung und Verbesserung dieser Arbeit beigetragen haben.

Außerdem danke ich Frau Martina Schulz für die Korrektur der vorliegenden Schrift und die freundliche Unterstützung.

Besonderer Dank gebührt meiner Familie und meinen Freunden, die mich während der letzten Jahre tatkräftig unterstützt haben.

Berlin, Februar 2007

Anja Würfel

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	iv
I Grundlagen der Optionsbewertung	1
1 Grundlagen der Optionspreisberechnung	3
1.1 Der Optionsbegriff	3
1.2 Annahmen an den Finanzmarkt	7
1.3 Das Modell des zukünftigen Kursverlaufs	8
1.4 Das Black-Scholes-Modell	10
1.5 Dividendenzahlungen	13
1.6 Beziehungen zwischen Optionspreisen	15
1.7 Basket-Optionen	19
2 Bewertung von europäischen Optionen	21
2.1 Die europäische Call-Option	21
2.2 Die europäische Put-Option	25
2.3 Interpretation der Black-Scholes-Formel	26
3 Bewertung von amerikanischen Optionen	27
3.1 Formulierung als Freies Randwertproblem	29
3.2 Alternative Formulierungen des Preisproblems	31
3.2.1 Das lineares Komplementaritätsproblem	31
3.2.2 Formulierung als Integralgleichung	34
3.3 Lösungsmechanismen im Überblick	36
3.3.1 Das Binomialmodell	36
3.3.2 Die Finite-Differenzen Methode	38
3.3.3 Die rekursive Integrationsmethode nach Huang	41
3.3.4 Die Methoden von Balakrishna	42
3.3.5 Die Monte-Carlo Methode	43
4 Bewertung von Basket-Optionen	45
4.1 Erweiterung des Black-Scholes-Modells	45
4.1.1 Die europäische Put-Basket-Option	45
4.1.2 Die amerikanische Put-Basket-Option	46
4.2 Lösungsmechanismen im Überblick	47

II	Analytische Lösung der Black-Scholes-Gleichung	49
5	Optionspreisbestimmung mit der Mellin-Transformation	51
5.1	Die europäische Put-Option	51
5.1.1	Herleitung der Preisfunktion	52
5.1.2	Äquivalenz zur Black-Scholes-Formel	53
5.2	Die amerikanische Put-Option	55
5.2.1	Herleitung der Preisfunktion	56
5.2.2	Äquivalenz zur Integralgleichung	59
6	Preisbestimmung einer Basket-Option	61
6.1	Die europäische Put-Basket-Option auf zwei Basiswerte	61
6.2	Die amerikanische Put-Basket-Option auf zwei Basiswerte	65
6.3	Die europäische Put-Basket-Option auf n Basiswerte	67
6.4	Die amerikanische Put-Basket-Option auf n Basiswerte	71
III	Numerische Lösung der Black-Scholes-Gleichung	75
7	Numerische Resultate	77
7.1	Die amerikanische Put-Option bezüglich eines Basiswertes	77
7.1.1	Vorbetrachtung	78
7.1.2	Numerische Auswertung	84
7.2	Die europäische Put-Basket-Option auf zwei Basiswerte	93
7.2.1	Vorbetrachtung	94
7.2.2	Numerische Auswertung	98
7.3	Die europäische Put-Basket-Option auf n Basiswerte	106
7.3.1	Vorbetrachtung	106
7.3.2	Numerische Auswertung	110
7.4	Die amerikanische Put-Basket-Option auf zwei Basiswerte	112
7.4.1	Vorbetrachtung	113
7.4.2	Numerische Auswertung	115
7.5	Die amerikanische Put-Basket-Option auf n Basiswerte	121
7.5.1	Vorbetrachtung	121
8	Schlussfolgerung und Ausblick	125
	Anhang	127
A	Notation	127
B	Die Mellin-Transformation	129
B.1	Die Mellin-Transformation in einer Dimension	129
B.2	Die Mellin-Transformation in n Dimensionen	131

C Die Gauß-Quadratur	133
C.1 Gauß-Laguerre-Quadratur	134
C.2 Gauß-Hermite-Quadratur	135
D Die Interpolationsquadratur	137
D.1 Die Rechteckregel	137
D.2 Die Trapezregel	138
E Beweise	141
Literaturverzeichnis	145

Teil I

Grundlagen der Optionsbewertung

Kapitel 1

Grundlagen der Optionspreisberechnung

1.1 Der Optionsbegriff

Eine Option ist ein Recht, einen Basiswert, zum Beispiel eine Aktie, zu einem festen zukünftigen Zeitpunkt für einen vorher festgelegten Preis zu kaufen beziehungsweise zu verkaufen. Dieses Recht kann der Besitzer der Option nutzen oder verfallen lassen. Wir werden nun eine konkrete Definition einer Kaufoption (Call-Option) und einer Verkaufsoption (Put-Option) angeben. Dabei bezeichnen wir die europäischen Optionen mit den kleinen Buchstaben c , p und die amerikanischen Optionen mit den großen Buchstaben C , P .

Definition 1 (Kaufoption - Call, Verkaufsoption - Put) *Eine europäische Call-Option ist ein Vertrag zwischen zwei Parteien, der dem Optionsinhaber das Recht gibt, zu einem bestimmten Zeitpunkt $T > t$, dem Verfallszeitpunkt (maturity), einen Basiswert zu einem bei Vertragsabschluss vereinbarten Preis K , dem Ausübungspreis (strike price), zu kaufen. Übt er das Recht nicht aus, verfällt die Option zur Zeit T ohne weitere Konsequenzen.*

Eine europäische Put-Option gibt dem Käufer das Recht, den Basiswert zur Zeit T zum vereinbarten Preis K zu verkaufen.

Der Inhaber einer amerikanischen Call-Option beziehungsweise einer amerikanischen Put-Option kann sein Recht, den Basiswert zu kaufen beziehungsweise zu verkaufen, jederzeit vom Erwerb der Option bis zum Verfallszeitpunkt T ausüben.

Wir wollen uns nun damit auseinandersetzen, wann es für den Optionsinhaber sinnvoll ist, sein Recht auszuüben. Hierfür wollen wir den Wert eines europäischen Puts zum Verfallszeitpunkt $t = T$ aus Sicht des Optionsinhabers näher untersuchen. Es gibt drei Möglichkeiten, wie sich der Kurs des Basiswertes am Verfallstag der Option zum vorher festgelegten Ausübungspreis entwickeln kann. Zum einen kann der Preis des Basiswertes zum Verfallszeitpunkt kleiner als der vorher vereinbarte Ausübungspreis ($S_T < K$) sein, das heißt, die Option befindet sich im Geld (*in the money*). Der Besitzer der

Put-Option wird sein Recht ausüben und den Basiswert für den höheren Preis K anstatt für die am Markt gezahlten S_T Geldeinheiten verkaufen. Er erhält damit einen Gewinn in Höhe von $K - S_T$. Die anderen beiden Möglichkeiten ergeben sich wie folgt: Ist $S_T = K$, so sagt man, der Put ist am Geld (*at the money*) oder andernfalls $S_T > K$, der Put ist aus dem Geld (*out of the money*). In diesen Fällen würde der Optionsinhaber sein Verkaufsrecht nicht ausüben, da er am Markt den gleichen beziehungsweise einen höheren Preis erzielen kann. Die Option ist wertlos und verfällt am Laufzeitende. Eine Call-Option verhält sich gegensätzlich zur Put-Option: Falls der Aktienpreis über dem Ausübungspreis liegt ($S_T > K$), befindet sie sich im Geld. In diesem Fall wird der Optionsinhaber den Basiswert für den kleineren Preis K kaufen und damit einen Ertrag in Höhe von $S_T - K$ erzielen. Wertlos wird ein Call dagegen, wenn er am Geld oder aus dem Geld ist. Diese Verhaltensweisen kann man in den sogenannten Auszahlungsfunktionen (*payoff functions*) zusammenfassend darstellen:

$$\text{Call:} \quad C(S, T) = (S_T - K)^+ := \max\{0, S_T - K\}, \quad (1.1a)$$

$$\text{Put:} \quad P(S, T) = (K - S_T)^+ := \max\{0, K - S_T\}, \quad (1.1b)$$

wobei sie den in der nachfolgenden Abbildung 1.1 gezeigten Verlauf haben.

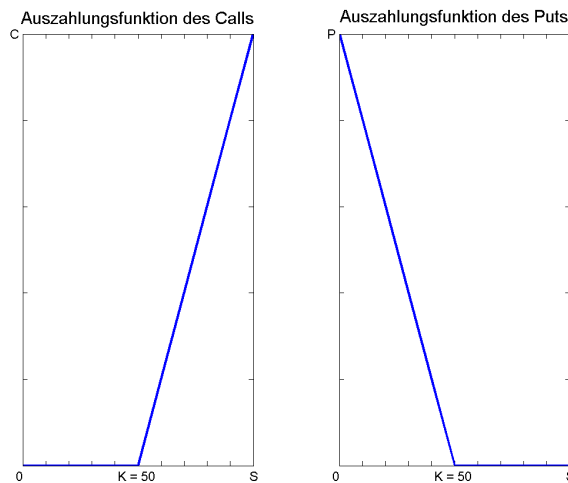


Abbildung 1.1: Auszahlungsfunktionen für den Ausübungspreis $K = 50$

Aus den bisherigen Überlegungen ist erkennbar, dass der Optionsinhaber mit einem Put maximal K und mit einem Call unendlich viel Geld erzielen kann. Der Verlust ist im Gegensatz dazu begrenzt. Das führt uns zu den zwei Hauptanwendungsgebieten von Optionen: Einerseits kann man Optionen zum Spekulieren verwenden, da sich der Preis der Option anders entwickelt als der Preis des Basiswertes. Dies wollen wir am Beispiel einer Call-Option auf eine Aktie näher erläutern.

Beispiel 1 (Spekulation) *Ein Spekulant, der davon ausgeht, dass der Kurs einer bestimmten Aktie innerhalb der nächsten zwei Monate steigt, kauft sich Call-Optionen auf dieses Wertpapier.*

Angenommen derzeit sei der Aktienpreis $S_0 = \text{EUR } 30$ und der Wert einer Call-Option mit einem Ausübungspreis von $K = \text{EUR } 35$ und einer Laufzeit von zwei Monaten ($T = 0.1666$) $c = \text{EUR } 1$. Investiert der Spekulant in diesem Fall einen Betrag in Höhe von $\text{EUR } 3.000$, so kann er 3.000 Optionen erwerben.

Tritt nun der vorhergesagte Fall ein und der Wert der Aktie liegt zwei Monate später bei $S_T = \text{EUR } 50$, so löst er seine Optionen ein und kauft die Aktien für den vereinbarten Preis $K = \text{EUR } 35$, wobei er sie unmittelbar danach für den höheren Marktpreis $S_T = \text{EUR } 50$ wieder verkauft. Damit erzielt er einen Gewinn nach Abzug der Kosten für den Optionskauf von insgesamt:

$$3.000 \cdot (\text{EUR } 50 - \text{EUR } 35) - \text{EUR } 3.000 = \text{EUR } 42.000.$$

Bei direkter Investition seiner $\text{EUR } 3.000$ könnte der Spekulant 100 Aktien erwerben, die zwei Monate später mit einem Verkauf einen Profit von:

$$100 \cdot (\text{EUR } 50 - \text{EUR } 30) = \text{EUR } 2.000$$

erwirtschaftet hätten. Dieser ist aber nur $1/21$ des Gewinns, den man mit der Optionspekulation erzielt hat.

Allerdings muss an dieser Stelle auch darauf hingewiesen werden, dass der Verlust beim Spekulieren mit Optionen bei entgegengesetzter Kursentwicklung höher gewesen wäre als beim Spekulieren mit Aktien.

Angenommen der Aktienpreis ist nach den zwei Monaten $S_T = \text{EUR } 20$, so hätte der Optionsspekulant seine erworbenen Optionen verfallen lassen und der Kaufpreis von $\text{EUR } 3.000$ wäre sein Verlust gewesen. Beim direkten Aktienkauf hätte er dagegen nur

$$100 \cdot (\text{EUR } 30 - \text{EUR } 20) = \text{EUR } 1.000$$

verloren.

Andererseits kann man Optionen zum Absichern gegen unerwünschte Preisschwankungen des Basiswertes verwenden, was man in der Finanzwelt als Hedging bezeichnet. Die Verwendung von Optionen als Hedging-Objekte wollen wir im nachfolgenden Beispiel erläutern.

Beispiel 2 (Hedging) *Ein europäisches Unternehmen benötigt im kommenden Jahr eine Maschine aus den Vereinigten Staaten für $\text{USD } 1.000.000$, die innerhalb eines Jahres bezahlt werden müssen. Um sich gegen die Wechselkursschwankungen zwischen den beiden Währungen abzusichern, kauft das Unternehmen 10.000 Call-Optionen mit den folgenden Eigenschaften:*

$$c = \text{EUR } 1, \quad T = 1 \text{ Jahr}, \quad K = \text{EUR } 1.$$

Jeder Optionsschein liefert also das Recht, USD 100 zum Preis von 1 EUR/USD zu kaufen.

Beträgt der Wechselkurs nach einem Jahr 1.1 EUR/USD, so löst das Unternehmen die Optionsscheine ein und kauft USD 1.000.000 zum Kurs von 1 EUR/USD. Das Unternehmen hat also insgesamt EUR 1.010.000 ausgegeben anstatt der sonst fälligen EUR 1.100.000. Damit erzielte das Unternehmen einen Gewinn von EUR 100.000 abzüglich der gezahlten Optionsprämie.

Liegt der Wechselkurs nach einem Jahr dagegen bei 0.9 EUR/USD, so wird das Unternehmen die USD 1.000.000 am Markt kaufen und die Optionsscheine verfallen lassen. Das Unternehmen hat keinen Gewinn erzielt; sein Verlust entspricht gerade der Optionsprämie.

Die Gesamtkosten des Dollarkaufs betragen also in jedem Fall nicht mehr als EUR 1.000.000 zuzüglich dem Optionspreis von insgesamt EUR 10.000. Der Preis, den das Unternehmen für die Call-Optionen zahlt, hat die Bedeutung einer Versicherungsprämie.

In den beiden Beispielen 1 und 2 haben wir gesehen, dass das Unternehmen für den Erwerb der Option eine Zahlung tätigen musste. Diese sogenannte Optionsprämie lässt sich nachvollziehen, weil eine Option eine nichtnegative Zahlung in der Zukunft zusichert. Da ihre Höhe aber unsicher ist, kann man sich fragen, von welchen Marktparametern der Optionswert abhängig ist. Diese Marktparameter werden wir kurz benennen:

1. Kurs des Basiswertes S_0 zum Zeitpunkt $t = 0$,
2. Ausübungspreis K ,
3. Laufzeit der Option T ,
4. Volatilität des Basiswertes σ ,
5. risikofreier Zinssatz r ,
6. Dividendenzahlungen D während der Laufzeit der Option.

Im Kapitel 1.6 werden wir ihren Einfluss auf den Optionspreis näher erläutern.

Definition 2 (Volatilität) Die Volatilität σ beschreibt die Unsicherheit, wie sich der Kurs des Basiswertes in der Zukunft verhält; sie stellt die sogenannte Standardabweichung dar.

1.2 Annahmen an den Finanzmarkt

Für den weiteren Verlauf dieser Arbeit müssen wir folgende Annahmen an den Finanzmarkt stellen. Wir gehen zunächst von einem sogenannten *idealen Finanzmarkt* aus. Hier haben:

- alle Investoren den selben Informationsstand und können verzögerungsfrei handeln.

In einem solchen Finanzmarkt sollte es keine Möglichkeit zur Arbitrage geben.

Definition 3 (Arbitrage) *Arbitrage entspricht einem sofortigen risikolosen Gewinn und kann in einem Finanzmarkt durch Fehlbepreisung entstehen.*

Andernfalls würde jeder Investor versuchen, einen risikolosen Gewinn augenblicklich mitzunehmen. Die dabei ausgelösten Transaktionen würden die Preise der einbezogenen Finanzinstrumente unmittelbar so ändern, dass die Arbitragemöglichkeit sofort verschwindet.

Zur Vereinfachung der Argumentation machen wir weitere Annahmen an den Finanzmarkt, sodass er als *perfekter Finanzmarkt* bezeichnet werden kann:

- keine Arbitragemöglichkeiten,
- keine Transaktionskosten,
- keine Steuern,
- keine Einschränkungen beim Leerverkauf,
- Geldeinlagen und Kredite haben die gleiche konstante Verzinsung r ,
- alle Wertpapiere sind beliebig teilbar.

Definition 4 (Leerverkauf - short selling) *Unter einem Leerverkauf (short selling) versteht man eine Handelsstrategie, bei der der Investor Objekte, zum Beispiel Aktien, die ihm nicht gehören, verkauft und sie später zurückkauft.*

Die Annahme der Arbitragefreiheit führt zu einer Einschränkung des Preisprozesses eines Finanzderivats und erleichtert uns so die Argumentationen. Betrachtet man nämlich zwei unterschiedliche Anlagestrategien mit gleicher Laufzeit, die am Ende den gleichen Wert haben, so haben sie wegen der Arbitragefreiheit auch zu jedem früheren Zeitpunkt $t < T$ den gleichen Wert.

1.3 Modell des zukünftigen Kursverlaufs ohne Dividendenzahlungen

Zur expliziten Berechnung von Optionspreisen, die von der zukünftigen (unbekannten) Entwicklung des Basiswertkurses abhängen, reichen die bisher gemachten Annahmen an den Finanzmarkt nicht aus. Hierfür wird zusätzlich ein Modell für den zukünftigen Kurs des Basiswertes benötigt. In der Regel handelt es sich dabei um stochastische Prozesse in diskreter oder stetiger Zeit. Die Prozesse in diskreter Zeit haben den Vorteil, dass man mit ihnen leicht numerische Berechnungen durchführen kann; die Prozesse in stetiger Zeit haben dagegen den Vorteil, dass viele Problemstellungen leicht analytisch behandelt werden können.

Wir wollen nun den Kurs des Basiswertes als Aktienkurs ansehen, wobei dieser zu den stochastischen Prozessen in diskreter Zeit gehört. Jedoch verwendet man als Modell für den Kursverlauf häufig stochastische Prozesse in stetiger Zeit, da sie rechnerisch nicht so aufwendig sind wie die diskreten Modelle (z. B. der Binomialprozess).

Um ein Modell für den Verlauf des Aktienkurses angeben zu können, müssen wir zuerst die empirischen Eigenschaften von Aktienkursen $(S_t, t \geq 0)$ näher betrachten.

- Aktienkurse sind nicht negativ ($S_t \geq 0$). Dies bedeutet, dass ein Anteilseigner nur mit seinem eingesetzten Kapital und nicht darüber hinaus haftet.
- Die erwartete mittlere Rendite des Basiswertes ist langfristig gesehen annähernd konstant und liegt pro Jahr bei etwa 4 – 8 %. Sie wird als *Drift* μ bezeichnet.
- Die prozentualen Kursschwankungen sind ebenfalls annähernd konstant. Sie liegen typischerweise zwischen 20 % und 40 % und werden durch die *Volatilität* σ beschrieben. Sie ist ein Maß für die zu erwartende Größe der zufälligen Schwankungen der Rendite um ihren Erwartungswert.

Die Parameter μ und σ sind voneinander abhängig und für Anlageentscheidungen auf der Basis von Risikopräferenzen wesentlich: Je größer die erwartete Rendite sein soll, um so ein höheres Risiko muss in der Regel eingegangen werden.

Der Verlauf eines Aktienkurses ist nicht vorhersehbar; er kann mit gleicher Wahrscheinlichkeit steigen oder fallen. Wir können aber sagen, dass mit höheren Kursen auch die Schwankungen größer werden. Ein solches Verhalten können wir in stetiger Zeit mit Hilfe einer stochastischen Differentialgleichung unter Verwendung einer *geometrischen Brownschen Bewegung* X_t darstellen.

Definition 5 (Brownsche Bewegung) *Eine Brownsche Bewegung, die auch unter dem Namen Standard-Wiener Prozess bekannt ist, ist ein stochastischer Prozess in stetiger Zeit $\{X_t; t \geq 0\}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1. Die Brownsche Bewegung startet mit einer Wahrscheinlichkeit $P = 1$ in Null, das heißt: $P(X_0 = 0) = 1$ *P*-fs.
2. $\{X_t; t \geq 0\}$ hat unabhängige Zuwächse, das heißt, für $0 \leq s \leq t \leq u \leq v$ ist $X_t - X_s$ unabhängig von $X_v - X_u$.

3. Für $0 \leq s \leq t$ ist der Zuwachs $(X_t - X_s)$ $\mathcal{N}(0, t - s)$ -verteilt, das heißt, seine Verteilung hängt nur von der Länge $t - s$ des Zeitintervalls ab, über das der Zuwachs betrachtet wird.

Die Bedeutung der beiden letzten Eigenschaften werden wir im nachfolgenden Satz kurz erläutern.

Satz 6 (Erläuterungen zur Definition 5) Die zweite Eigenschaft der Brownschen Bewegung besagt: Kennt man nur die Anfangswerte von Teilstücken eines Pfades, so kann man keine Rückschlüsse von dem Verlauf des einen Teilstücks eines Pfades $[s, t]$ auf den Verlauf eines anderen Teilstücks im Intervall $[u, v]$ ziehen. Der Pfad kann sich also zu jedem Zeitpunkt mit exakt der gleichen Wahrscheinlichkeit nach oben oder nach unten bewegen, egal welchen Verlauf er bis zu diesem Zeitpunkt genommen hat. Die letzte Eigenschaft bedeutet, dass der stochastische Prozess $\hat{X}(y) = X(t + s) - X(s)$ wieder eine Brownsche Bewegung ist. Wenn wir also ein „Endstück“ eines Pfades abschneiden und den Anfangspunkt in den Nullpunkt verschieben, so erhalten wir wieder einen Pfad der Brownschen Bewegung.

Die Brownsche Bewegung ist mit Wahrscheinlichkeit $P = 1$ stetig, aber auch mit der gleichen Wahrscheinlichkeit nirgends differenzierbar, da sie extrem stark fluktuiert.

Definition 7 (geometrische Brownsche Bewegung) Für eine eindimensionale Brownsche Bewegung X_t mit Drift μ und Volatilität σ sei

$$S_t := S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma X_t} \quad (1.2)$$

die dazugehörige geometrische Brownsche Bewegung. Der Prozess S_t ist log-normalverteilt.

Unter der Annahme des Modells einer geometrischen Brownschen Bewegung erfüllt der Kurs des Basiswertes S_t die folgende *stochastische Differentialgleichung*:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dX_t, \quad (1.3)$$

wobei die geometrische Brownsche Bewegung gerade die Lösung der stochastischen Differentialgleichung (1.3) ist. Der erste Term auf der rechten Seite dieser Gleichung (1.3) liefert das prozentuale konstante Wachstum mit dem Drift μ ; er entspricht der konstanten Rendite des Aktienkurses. Der zweite Term überlagert dieses exponentielle Wachstumsverhalten mit prozentual konstanten Fluktuationen.

Die Verwendung von *stochastischen Differentialgleichungen* für die Beschreibung von Kursverläufen ist darin begründet, dass sie für jeden Anfangswert nicht nur eine, sondern viele Lösungstrajektorien besitzen, welche vom Zufall abhängen. Die Idee dabei ist, dass die verschiedenen Lösungen dieser Gleichungen die möglichen zukünftigen Kursverläufe so approximieren, dass gewisse aus der Vergangenheit des Kursverlaufes ermittelte statistische Werte, wie zum Beispiel die Varianz (also die Streuung um den Mittelwert) des Kurses, gut modelliert werden.

Mit dem Modell der geometrischen Brownschen Bewegung haben wir eine Möglichkeit gefunden, den Aktienkurs sowie andere Basiswertkurse zu simulieren, was die nachfolgende Graphik veranschaulicht. In der Abbildung 1.2¹ wird der Kurs des Basiswertes S_t (insbesondere der Aktienwert) in Abhängigkeit von der Zeit t mit der Drift μ und der Volatilität σ graphisch simuliert.

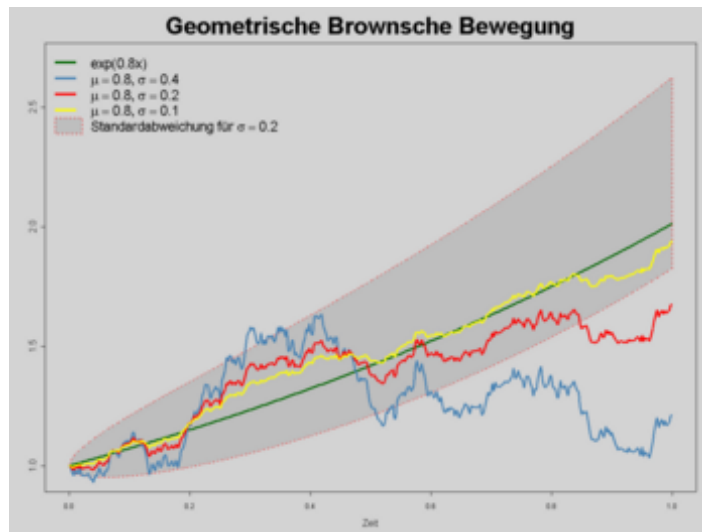


Abbildung 1.2: Simulation von Aktienkursen mit geometrischer Brownscher Bewegung

Dieses Modell stellt die Grundlage des klassischen Black-Scholes-Ansatzes dar und wird in der Finanzmathematik häufig verwendet. Es liefert eine brauchbare und in der Praxis bewährte Näherung für Aktienkurse über kurze und mittlere Zeiträume. Inzwischen sind zwar eine Reihe von Diskrepanzen zwischen Realität und Modell bekannt, aber der Black-Scholes-Ansatz wird dennoch als erste einfache Näherung zur Optionsbewertung verwendet.

Im nächsten Abschnitt werden wir das Black-Scholes-Modell einführen, welches die Grundlage unserer Arbeit sein wird.

1.4 Das Black-Scholes-Modell

Im Jahr 1973 veröffentlichten Fischer Black und Myron Scholes ihre Arbeiten, die die bekannte *Black-Scholes-Gleichung* zur Bewertung von europäischen Optionen enthielten. Eine Verallgemeinerung wurde von Robert Merton im selben Jahr veröffentlicht. Die enorme Bedeutung dieser Gleichung wurde durch die Verleihung des Nobelpreises für Wirtschaftswissenschaften im Jahr 1997 unterstrichen.

Das *Black-Scholes-Modell* geht von einem perfekten Finanzmarkt aus und verwendet, wie bereits im vorherigen Abschnitt erwähnt, das Modell der geometrischen Brownschen Bewegung für den Verlauf des Aktienkurses, der durch die stochastische Diffe-

¹Quelle: <http://de.wikipedia.org/wiki/Bild:GBM.png>

rentialgleichung (1.3)

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dX_t$$

beschrieben wird. Um diese stochastische Differentialgleichung lösen zu können, benötigen wir noch ein Hilfsmittel aus der Theorie der stochastischen Prozesse:

Satz 8 (Die Itô-Formel für die geometrische Brownsche Bewegung) Sei S_t eine geometrische Brownsche Bewegung, $f \in C^{1,2}([0, \infty) \times [0, \infty))$. Dann ist:

$$df(S, t) = \frac{\partial f}{\partial S}(S, t) dS_t + \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(S, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(S, t) \right) dt. \quad (1.4)$$

Wir ersetzen nun in der oben eingeführten Itô-Formel (1.4) die geometrische Brownsche Bewegung S_t durch die stochastische Differentialgleichung (1.3) und erhalten die *veränderte Itô-Formel*:

$$df(S, t) = \sigma S \frac{\partial f}{\partial S}(S, t) dX_t + \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(S, t) + \mu S \frac{\partial f}{\partial S}(S, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(S, t) \right) dt, \quad (1.5)$$

wobei X_t eine Brownsche Bewegung ist.

Der Ansatz zur Herleitung der Black-Scholes-Gleichung beruht auf dem Duplikationsprinzip. Dies bedeutet, dass der Wert eines Portfolios, das die zu bewertende Option enthält, durch ein zweites Portfolio dupliziert wird, welches ausschließlich aus Finanzinstrumenten mit bekannten Preisen besteht. Dieses Duplikationsportfolio wird so gewählt, dass beide Portfolios zu einem Zeitpunkt T , typischerweise dem Fälligkeitstermin der Option, wertgleich sind. Damit folgt aus der Annahme eines perfekten Finanzmarktes und insbesondere aus der Arbitragefreiheit die Wertgleichheit zu jedem früheren Zeitpunkt. Für die Herleitung betrachten wir das folgende Portfolio:

Kaufe eine Option $V(S, t)$ und verkaufe den Bruchteil $\Delta \cdot S$ des Basiswertes.

Dies ist möglich, da wir Leerverkäufe zulassen. Der Wert dieses Portfolios ist mit $\pi = V(S, t) - \Delta \cdot S$ gegeben. In dem Zeitintervall dt verändert sich der Wert von π wie folgt:

$$d\pi = dV(S, t) - \Delta dS.$$

Wendet man darauf die stochastische Differentialgleichung (1.3) an, so ergibt sich:

$$d\pi = dV(S, t) - \Delta \mu S dt - \Delta \sigma S dX_t.$$

Als nächstes ersetzen wir $dV(S, t)$ durch die *veränderte Itô-Formel* (1.5):

$$\begin{aligned} d\pi &= \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S}(S, t) - \Delta \right) dX_t \\ &\quad + \left(\frac{\partial V}{\partial t}(S, t) + \mu S \frac{\partial V}{\partial S}(S, t) - \mu S \Delta + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) \right) dt. \end{aligned}$$

Da wir eine risikoneutrale Anlagestrategie verfolgen wollen, muss die Anzahl der Anteile des Basiswertes Δ gerade so groß sein, dass das stochastische Risiko in der Gleichung für $d\pi$ eliminiert wird, welches durch den ersten Term der rechten Seite beschrieben

wird. Die Anzahl der Anteile sei deshalb $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}(S, t)$ und wir erhalten:

$$d\pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t}(S, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) \right) dt. \quad (1.6)$$

Den Wert dieses Portfolios bestimmen wir nun über das folgende Duplikationsportfolio:

Lege den Betrag π zum risikolosen Zinssatz bis zu dem Verfallszeitpunkt des Portfolios π fest an.

Nach der Zeit dt erhalten wir so einen Betrag von $r\pi dt$, wobei $\pi = V(S, t) - \delta \cdot S$. Da wir die Arbitragefreiheit vorausgesetzt haben, müssen die beiden Anlagemöglichkeiten (Portfolios) den gleichen Wert haben. Damit ergibt sich die berühmte *Black-Scholes-Gleichung*:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S, t) + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) + rS \frac{\partial V}{\partial S}(S, t) - rV(S, t) = 0, \quad (1.7)$$

wobei $0 \leq t \leq T$ und der Kurs des Basiswertes S_t eine geometrische Brownsche Bewegung ist. $V(S, t)$ beschreibt die Wertfunktion des Finanzderivats, das in unserem Fall gerade einer Option entsprechen soll.

Für amerikanische Optionen kann man die Herleitung nicht so einfach über ein Duplikationsportfolio vornehmen, da man nicht weiß, wie lange die Option gehalten wird und deshalb ist das Laufzeitende des ersten Portfolios π ungewiss. Wir haben hier also zusätzlich zum Bewertungsproblem noch das Problem des optimalen Ausübungszeitpunktes. In diesem Fall spricht man von einem freien Randwertproblem und die Black-Scholes-Gleichung gilt nur solange, bis der optimale Ausübungszeitpunkt erreicht ist, das heißt, bis der Kurs des Basiswertes den freien Rand erreicht hat.

Betrachtet man die Black-Scholes-Gleichung (1.7) näher, so fällt auf, dass der Zinssatz r und die Volatilität σ des Basiswertkurses berücksichtigt werden, die Drift μ jedoch nicht. Der Grund dafür liegt in der risikoneutralen Bewertung, die gewährleistet, dass der nach dieser Gleichung berechnete faire Preis des Basiswertes gerade dem heutigen Basiswertkurs entspricht.

Der Ansatz von Black und Scholes ist nicht auf die Preisbestimmung einfacher Puts und Calls beschränkt, sondern lässt sich auf jedes Finanzderivat V bezüglich eines Basiswertes mit Kurs S_t anwenden, falls S_t einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt und wenn der Preis V des Finanzderivats bis zu seiner Ausübung nur eine Funktion des aktuellen Kurses und der Zeit ist: $V = V(S, t)$. Aus diesem Grund muss man die Black-Scholes-Gleichung über entsprechende End- und Randbedingungen dem jeweiligen Derivat anpassen.

Wir benötigen also für eine eindeutige Lösung der Black-Scholes-Gleichung eine (zeitliche) Endbedingung sowie (räumliche) Randbedingungen bezüglich des Basiswertkurses. Die Endbedingung entspricht dem Wert des Derivats zum Zeitpunkt $t = T$, den wir im Kapitel 1.1 bereits hergeleitet haben. Die Randbedingungen beziehen sich auf die Werte des Basiswertkurses für $S_t = 0$ und $S_t \rightarrow \infty$ und können, da S_t eine

geometrische Brownsche Bewegung ist, unmittelbar aus deren Eigenschaften gefolgert werden:

- Eine geometrische Brownsche Bewegung S_t verlässt den Wert Null nicht mehr, wenn sie ihn einmal angenommen hat.
- Hat die geometrische Brownsche Bewegung S_t ein Niveau weit oberhalb von K erreicht, so unterschreitet sie den Ausübungspreis K nur mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit wieder.

Wir können nun die geltenden End- und Randbedingungen explizit angeben.

Für den europäischen Call gilt:

$$\text{Endbedingung } t = T: \quad c(S, T) = (S_T - K)^+, \quad (1.8a)$$

$$1. \text{ Randbedingung } S_t = 0: \quad c(0, t) = 0, \quad (1.8b)$$

$$2. \text{ Randbedingung } S_t \rightarrow \infty: \quad c(S, t) \rightarrow S_t - Ke^{-r(T-t)} \sim S_t. \quad (1.8c)$$

Für den europäischen Put gilt:

$$\text{Endbedingung } t = T: \quad p(S, T) = (K - S_T)^+, \quad (1.9a)$$

$$1. \text{ Randbedingung } S_t = 0: \quad p(0, t) = Ke^{-r(T-t)}, \quad (1.9b)$$

$$2. \text{ Randbedingung } S_t \rightarrow \infty: \quad p(S, t) \rightarrow 0. \quad (1.9c)$$

Wir haben also mit der Black-Scholes-Gleichung eine Möglichkeit gefunden, den Wert von Optionen, auf deren Basiswerte keine Dividendenzahlungen erfolgen, zu berechnen. Wir wissen aber aus der Praxis, dass es viele Basiswerte – insbesondere Aktien – gibt, auf die Dividenden ausgeschüttet werden. Hier stellt sich nun die Frage, wie man diese Optionen bewerten kann. Dazu liefert der nachfolgende Abschnitt eine mögliche Antwort.

1.5 Dividendenzahlungen

Wir wollen in diesem Abschnitt untersuchen, wie man die Black-Scholes-Gleichung verändern muss, um Optionen zu bewerten, auf deren Basiswerte Dividenden gezahlt werden. Wir betrachten zunächst den Fall, dass ein Unternehmen einmal im Jahr zur Zeit $t = t_d$ Dividenden ausschüttet. Eine solche Ausschüttung bezeichnet man in der Finanzmathematik als *diskrete Dividendenzahlung*. Der Besitzer des Basiswertes, auf den das Unternehmen die Dividende zahlt, erhält dann einen Betrag in Höhe von $d \cdot S(t_d^-)$ mit der Dividendenrate $0 \leq d < 1$, wobei $S(t_d^-)$ dem Kurs des Basiswertes unmittelbar vor der Dividendenausschüttung entspricht. Aus Arbitragegründen muss der Kurs des Basiswertes um die Dividendenzahlung gemindert werden, da ansonsten ein sofortiger risikoloser Gewinn durch den Kauf des Basiswertes zur Zeit $t = t_d^-$ und sofortigem Verkauf nach der Dividendenausschüttung zur Zeit $t = t_d^+$ erzielt werden könnte. Der Kurs weist somit unmittelbar nach der Dividendenzahlung zur Zeit $t = t_d^+$ einen Wert von

$$S(t_d^+) = S(t_d^-) - d \cdot S(t_d^-)$$

auf. Aus dieser sprunghaften Kurssenkung folgt, dass der Kurs des Basiswertes bezüglich der Zeit nicht mehr stetig ist, falls die gezahlte Dividende strikt positiv ($d > 0$) ist. Der Inhaber einer Option bezüglich diesen Basiswertes erhält keine Dividendenzahlung, weil er ihn nicht besitzt. Dies hat zur Folge, dass sich der Optionspreis in den Zeitpunkten t_d^- und t_d^+ nicht unterscheiden darf. Er ist somit als Zeitfunktion stetig und es muss gelten:

$$V(S, t_d^-) = V(S, t_d^+). \quad (1.10)$$

Da aber der Kurs des Basiswertes bezüglich der Zeit unstetig ist, wenn eine Dividendenzahlung erfolgt, erweist sich die Bewertung der Option als schwierig. Der Grund dafür ist, dass die Black-Scholes-Gleichung nur auf stetige Kursverläufe angewendet werden darf. Das Problem lässt sich umgehen, indem man die unstetige Funktion S_t in ihre stetigen Teilintervalle zerlegt. Die Optionsbewertung erfolgt dann für jedes Teilintervall, die über die Sprungbedingung (1.10) miteinander verbunden werden. Im Detail funktioniert die Bewertung folgendermaßen:

Zuerst ermittelt man den Optionspreis zur Zeit $t = t_d^+$ durch Anwendung der Black-Scholes-Gleichung im Intervall $[t_d^+, T]$ mit der Endbedingung $V(S, T)$. Mit Hilfe der Sprungbedingung (1.10) können wir dann von $V(S, t_d^-)$ auf $V(S, t_d^+)$ schließen. Dieser Optionswert entspricht nun unserer neuen Endbedingung, die wir für die Ermittlung des Optionspreises mit der Black-Scholes-Gleichung im Zeitintervall $[0, t_d^-]$ benötigen.

Diese Vorgehensweise kann man natürlich auch auf endlich viele Dividendenzahlungen anwenden. Schüttet ein Unternehmen pro Jahr sehr viele Dividenden zu unterschiedlichen Zeiten aus, kann man diese, der Einfachheit halber, als eine *kontinuierliche Dividendenzahlung* ansehen. Hierbei nehmen wir an, dass die Höhe der Dividende vom Kurs des Basiswertes abhängt und zu ihm proportional ist mit dem Proportionalitätsfaktor $D \geq 0$. In diesem Fall wird in der Zeit dt die Dividende $DSdt$ ausgezahlt. Aus Arbitragegründen müssen wir nun wieder den Kurs des Basiswertes um den Dividendenbetrag minimieren, was dazu führt, dass wir den stochastischen Prozess (1.3) aus Abschnitt 1.3 den veränderten Bedingungen anpassen müssen. Er wird nun folgendermaßen definiert:

$$dS_t = (\mu - D)S_t dt + \sigma S_t dX_t. \quad (1.11)$$

Die *modifizierte Black-Scholes-Gleichung* hat damit die folgende Gestalt:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S}(S, t) - rV(S, t) = 0, \quad (1.12)$$

wobei $0 \leq t \leq T$ und der Kurs des Basiswertes S_t eine geometrische Brownsche Bewegung ist.

Da wir das Modell für den Kursverlauf des Basiswertes verändert haben, müssen wir noch prüfen, inwiefern die End- und Randbedingungen der europäischen Call- und Put-Optionen an die Veränderung bezüglich der Dividendenzahlung angepasst werden müssen. Hierbei kommen wir zu dem Schluss, dass nur die zweite Randbedingung

des europäischen Calls, bei dem der Kurs des Basiswertes gegen Unendlich strebt, einer Veränderung unterzogen werden muss. Die Bedingungen für den europäischen Call weisen dann die folgende Gestalt auf:

$$\text{Endbedingung } t = T: \quad c(S, T) = (S_T - K)^+, \quad (1.13a)$$

$$1. \text{ Randbedingung } S_t = 0: \quad c(0, t) = 0, \quad (1.13b)$$

$$2. \text{ Randbedingung } S_t \rightarrow \infty: \quad c(S, t) \sim S_t e^{-D(T-t)}. \quad (1.13c)$$

Alle anderen Bedingungen, einschließlich die des europäischen Puts, bedürfen keiner Veränderung.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass man in der Finanzmathematik zwischen den diskreten und den kontinuierlichen Dividendenzahlungen unterscheidet. In der Praxis erfolgen die meisten Dividendenzahlungen auf einem Index (z. B. der *Dow Jones Industrial Average* (DJIA) oder dem *Standard and Poor's 500* (S&P500)). Diese Zahlungen sind dann so häufig, dass sie als kontinuierliche Zahlungen modelliert werden können. Aus diesem Grund werden wir uns in dieser Arbeit auf kontinuierliche Dividendenzahlungen beschränken, wobei gelten soll: $0 \leq D < r$.

1.6 Beziehungen zwischen Optionspreisen

Mit der Black-Scholes-Gleichung haben wir eine Möglichkeit gefunden, wie wir den Optionspreis ermitteln können. Doch bevor wir zu einer expliziten Bewertung kommen (siehe Kapitel 2 und 3), wollen wir das allgemeingültige Verhalten der Optionspreise untersuchen. Wir verwenden hier also kein explizites Modell für den Basiswertkurs, sondern setzen nur die Arbitragefreiheit voraus. Wir starten unsere Untersuchung hinsichtlich der Frage, ob für den Wert einer Option Preisgrenzen existieren und welche Gestalt diese dann haben.

Die bedeutendste Eigenschaft einer Option ist, dass der Optionsinhaber selbst entscheiden kann, wann und ob er sein Optionsrecht ausüben möchte. Diese Wahlmöglichkeit führt zur Nichtnegativität von Optionspreisen, das heißt:

$$\begin{aligned} c(S, t) &\geq 0, & p(S, t) &\geq 0, \\ C(S, t) &\geq 0, & P(S, t) &\geq 0. \end{aligned}$$

Um konkrete Angaben zu den Preisgrenzen machen zu können, müssen wir zusätzlich zur Arbitragefreiheit verlangen, dass zu jedem Zeitpunkt t Geld zum risikolosen Zinssatz r angelegt oder geliehen werden kann. Des Weiteren benötigen wir noch die folgende Definition.

Definition 9 (innerer Wert) *Der innere Wert (intrinsic value) einer Option entspricht der Zahlung, die der Optionsinhaber bei sofortiger Ausübung seines Rechts erhalten würde. Der innere Wert lautet:*

$$\begin{aligned} \text{Call: } & (S_t - K)^+, \\ \text{Put: } & (K - S_t)^+. \end{aligned}$$

Die untere Schranke einer amerikanischen Option entspricht gerade ihrem inneren Wert, da ansonsten durch den Kauf der Option und sofortiger Ausübung ein risikoloser Gewinn erzielt werden könnte:

$$C(S, t) \geq (S_t - K)^+, \quad P(S, t) \geq (K - S_t)^+.$$

Für eine europäische Option gilt diese Relation im Allgemeinen nicht, denn sie kann nur indirekt über ein Termingeschäft zum heutigen Zeitpunkt vorzeitig ausgeübt werden. Hierbei ist zu beachten, dass der Ausübungspreis abgezinst werden muss, wodurch der Wert der Option unter den inneren Wert fallen kann. Unter der Voraussetzung, dass es keine Dividendenzahlungen auf den Basiswert gibt, ist es allerdings möglich, die folgende untere Preisgrenze für europäische Optionen anzugeben:

$$c(S, t) \geq (S_t - e^{-r(T-t)}K)^+, \quad p(S, t) \geq (e^{-r(T-t)}K - S_t)^+.$$

Die obere Schranke einer Call- oder einer Put-Option kann aus Arbitragegründen ebenfalls explizit angegeben werden:

$$\begin{aligned} c(S, t) &\leq S_t, & p(S, t) &\leq K, \\ C(S, t) &\leq S_t, & P(S, t) &\leq K. \end{aligned}$$

Als nächstes wollen wir prüfen, wie sich die Preise von identischen Optionen verhalten, wenn man immer genau einen der folgenden Marktparameter verändert:

1. Kurs des Basiswertes S_0 zum Zeitpunkt $t = 0$,
2. Ausübungspreis K ,
3. Laufzeit der Option T ,
4. Volatilität des Basiswertes σ ,
5. risikofreier Zinssatz r ,
6. Dividendenzahlungen D während der Laufzeit der Option.

Die Abhängigkeit des Optionspreises vom *Kurs des Basiswertes zum Zeitpunkt des Optionskaufs* und vom *Ausübungspreis* sind unmittelbar aus der Auszahlungsfunktion ableitbar. Sollten wir die Option in der Zukunft ausüben, würden die Auszahlungsfunktionen (1.1) echt positiv sein. Es ergibt sich demnach, dass mit höherem Kurs des aktuellen Basiswertes der Preis der Call-Option steigt und mit höherem Ausübungspreis der Callpreis sinkt. Bei der Put-Option gilt genau das Gegenteil.

Für $S_0 \leq \hat{S}_0$ gilt:

$$\begin{aligned} c_{S_0}(S, t) &\leq c_{\hat{S}_0}(S, t), & p_{S_0}(S, t) &\geq p_{\hat{S}_0}(S, t), \\ C_{S_0}(S, t) &\leq C_{\hat{S}_0}(S, t), & P_{S_0}(S, t) &\geq P_{\hat{S}_0}(S, t). \end{aligned}$$

Für $K \leq \hat{K}$ gilt:

$$\begin{aligned} c_K(S, t) &\geq c_{\hat{K}}(S, t), & p_K(S, t) &\leq p_{\hat{K}}(S, t), \\ C_K(S, t) &\geq C_{\hat{K}}(S, t), & P_K(S, t) &\leq P_{\hat{K}}(S, t). \end{aligned}$$

Der *Laufzeit*-Faktor spielt bei den amerikanischen Optionen eine wesentliche Rolle. Sie wird umso wertvoller, je länger die Laufzeit ist, wobei es keinen Unterschied macht, ob wir eine Call-Option oder eine Put-Option betrachten. Der Grund dafür ist leicht nachzuvollziehen, denn vergleichen wir zwei Optionen miteinander, die sich nur in der Laufzeit unterscheiden, so hat die später endende Option mehr Ausübungsmöglichkeiten als die Option mit der kürzeren Laufzeit.

Für $T \leq \hat{T}$ gilt:

$$C_T(S, t) \leq C_{\hat{T}}(S, t), \quad P_T(S, t) \leq P_{\hat{T}}(S, t).$$

Bei europäischen Optionen ist die Laufzeit nebensächlich. Sie werden gewöhnlich teurer, wenn ihre Laufzeit zunimmt. Dies lässt sich damit erklären, dass der Kurs des Basiswertes mit längerer Laufzeit noch weniger vorhersagbar ist. Diese Wertsteigerung stimmt aber nicht immer, was sich am Fall von diskreter Dividendenzahlung aufzeigen lässt. Wir betrachten zwei Call-Optionen auf einer Aktie, die Dividenden ausschüttet. Die erste Call-Option hat eine Laufzeit, die vor der Dividendenausschüttung endet und die zweite verfällt kurz danach. Da die Dividendenzahlung zu sinkenden Aktienkursen führt, ist die erste Option wertvoller als die zweite Option.

Die *Volatilität* beschreibt die Unsicherheit, wie sich der Kurs des Basiswertes in der Zukunft verhält. Dies bedeutet, dass mit steigender Volatilität die Chance größer wird, dass der Kurs des Basiswertes steigt, aber gleichfalls auch fallen kann. Die Besitzer von Put-Optionen profitieren von einem fallenden Kurs, gleichzeitig ist aber das Risiko, dass der Kurs steigt, durch den Verlust des Optionspreises begrenzt. Dies führt dazu, dass mit steigender Volatilität auch der Preis einer Put-Option steigt. Analog kann man die Wertsteigerung einer Call-Option mit steigender Volatilität erklären.

Für $\sigma \leq \hat{\sigma}$ gilt:

$$\begin{aligned} c_\sigma(S, t) &\leq c_{\hat{\sigma}}(S, t), & p_\sigma(S, t) &\leq p_{\hat{\sigma}}(S, t), \\ C_\sigma(S, t) &\leq C_{\hat{\sigma}}(S, t), & P_\sigma(S, t) &\leq P_{\hat{\sigma}}(S, t). \end{aligned}$$

Als Nächstes befassen wir uns mit dem Einfluss der *risikofreien Zinsrate* auf den Optionspreis. Steigt der Zinssatz am Markt, so tendieren auch die Preise des Basiswertes - insbesondere Aktien - zum Steigen. Der aktuelle Wert der zukünftigen Cashflows fällt jedoch für den Halter der Option, was dazu führt, dass der Put-Optionspreis sinkt und der Call-Optionspreis steigt.

Für $r \leq \hat{r}$ gilt:

$$\begin{aligned} c_r(S, t) &\leq c_{\hat{r}}(S, t), & p_r(S, t) &\geq p_{\hat{r}}(S, t), \\ C_r(S, t) &\leq C_{\hat{r}}(S, t), & P_r(S, t) &\geq P_{\hat{r}}(S, t). \end{aligned}$$

Zum Abschluss müssen wir noch den Einfluss von *Dividendenzahlungen* auf den Optionspreis untersuchen. Wir wissen bereits, dass Aktienkurse nach einer Dividendenausschüttung sinken. Aus diesem Grund ist es für den Inhaber einer Put-Option

lukrativer, bei festem Ausübungspreis seine Aktie zu verkaufen. Zusammengefasst ist der Preis von Put-Optionen, deren Basiswerte Dividenden zahlen, höher als der Preis von Put-Optionen ohne Dividendenzahlungen. Bei Call-Optionen führen die Dividendenzahlungen dazu, dass ihr Wert sinkt, denn es ist lukrativer, zu dem niedrigeren Marktpreis die Aktie zu kaufen.

Für $D \leq \hat{D}$ gilt:

$$\begin{aligned} c_D(S, t) &\geq c_{\hat{D}}(S, t), & p_D(S, t) &\leq p_{\hat{D}}(S, t), \\ C_D(S, t) &\geq C_{\hat{D}}(S, t), & P_D(S, t) &\leq P_{\hat{D}}(S, t). \end{aligned}$$

Da sich unsere Betrachtungen bisher immer nur auf gleiche Optionsarten beschränkt haben, wollen wir nun eine Beziehung zwischen Call- und Put-Optionen herstellen. Diese Beziehung ist unter dem Namen der *Put-Call-Parität* bekannt und existiert in ihrer bekannten Form nur für europäische Optionen.

Satz 10 (Put-Call-Parität für europäische Optionen)

Für den Wert eines europäischen Calls $c(S, \tau)$ und eines europäischen Puts $p(S, \tau)$ mit gleichem Verfallszeitpunkt T und gleichem Ausübungspreis K auf denselben Basiswert, der kontinuierliche Dividenden D auszahlt, gilt folgende Aussage für die Restlaufzeit $\tau = T - t$:

$$c(S, \tau) = p(S, \tau) + Se^{-D\tau} - Ke^{-r\tau}, \quad \text{wobei } 0 \leq D.$$

Mit Hilfe der Put-Call-Parität kann man den Wert einer europäischen Call-Option aus dem Wert einer europäischen Put-Option ableiten und umgekehrt. Ihre Bedeutung geht soweit, dass man, wenn man den Wert eines europäischen Calls oder Puts kennt, unmittelbar den eindeutigen Wert des europäischen Gegenparts allgemeingültig berechnen kann, ohne ein Modell für den Basiswertkurs zu benötigen.

Nun wäre es wünschenswert, eine solche Beziehung auch für amerikanische Optionen angeben zu können, doch wir können diese Beziehung für amerikanische Optionen nur mit Hilfe einer Ungleichung beschreiben. Der Grund liegt darin, dass es nie vorteilhaft sein kann, einen Call und einen Put gleichzeitig auszuüben.

Satz 11 (Put-Call-Parität für amerikanische Optionen)

Für einen amerikanischen Call $C(S, \tau)$ und einem amerikanischen Put $P(S, \tau)$ mit gleichem Verfallszeitpunkt T und gleichem Ausübungspreis K auf denselben Basiswert, der kontinuierliche Dividenden D auszahlt, gilt die folgende Aussage für die Restlaufzeit $\tau = T - t$:

$$P(S, \tau) + S - Ke^{-r\tau} \geq C(S, \tau) \geq P(S, \tau) + Se^{-D\tau} - K,$$

wobei $0 \leq D < r$.

Zum Abschluss wollen wir untersuchen, welche Optionspreisbeziehungen zwischen europäischen und amerikanischen Optionen existieren.

Zum Verfallszeitpunkt T besitzen europäische und amerikanische Optionen den gleichen Wert, da sie dann ihren Besitzern identische Rechte einräumen:

$$c(S, T) = C(S, T) = (S_T - K)^+, \quad p(S, T) = P(S, T) = (K - S_T)^+.$$

Eine amerikanische Option hat mindestens den Wert wie eine ansonsten identische europäische Option, da die amerikanische Option dem Besitzer mehr Rechte einräumt.

$$c(S, t) \leq C(S, t), \quad p(S, t) \leq P(S, t).$$

Man kann daher sagen, dass sich der Preis einer amerikanischen Option aus dem Preis der dazu passenden europäischen Option und einer vorzeitigen Ausübungprämie bestimmen lässt:

$$C(S, t) = c(S, t) + e(S, t), \quad P(S, t) = p(S, t) + e(S, t).$$

Eine amerikanische Call-Option hat während der gesamten Laufzeit den gleichen Wert wie ihre analoge europäische Call-Option, wenn auf den Basiswert keine Dividenden gezahlt werden:

$$c(S, t) = C(S, t), \quad \text{für } t \in [0, T].$$

Die Preisgleichheit folgt aus der Tatsache, dass es nie vorteilhaft ist, einen amerikanischen Call bezüglich eines Basiswertes, auf den keine Dividenden gezahlt werden, vorzeitig auszuüben. Dies wollen wir in der nachfolgenden Bemerkung genauer erläutern.

Bemerkung 12 (Vorzeitige Ausübung eines amerikanischen Calls)

Wir betrachten einen europäischen Call, auf dessen Basiswert keine Dividendenzahlung erfolgt. Falls sich dieser Call im Geld befindet, gilt nach den bisher untersuchten Beziehungen folgende Ungleichung:

$$C(S, t) \geq c(S, t) \geq (S_t - e^{-r(T-t)}K)^+ > (S_t - K)^+ = S_t - K.$$

Der amerikanische Call hat also vor dem Ende seiner Laufzeit immer einen strikt größeren Wert als seinen inneren Wert $S_t - K$. Diese Erkenntnis führt uns dazu, dass der Optionsinhaber mit einem Verkauf der Option einen höheren Erlös als mit der Ausübung erlangen kann. Hat der Optionsbesitzer seine Option nur aus dem Gesichtspunkt des Hedgings gekauft, so ist es trotzdem nicht von Vorteil, sie vorher auszuüben. Sollte der Kurs des Basiswertes nämlich weiter ansteigen, bleibt der vereinbarte Ausübungspreis unverändert. Er geht also kein Risiko ein, am Ende der Laufzeit einen höheren Preis zahlen zu müssen. Übt der Besitzer allerdings sein Recht vorzeitig aus und der Kurs des Basiswertes würde danach unter den Ausübungspreis K fallen, dann hätte der Besitzer zu einem späteren Zeitpunkt seinen Basiswert am Markt günstiger erwerben können. Man kann sagen, der Optionsbesitzer ist mit der Option gegen Kurschwankungen abgesichert. Außerdem würden dem Optionsinhaber Zinsen auf das Geld, was er zum Erwerb des Basiswertes benötigt, verloren gehen.

1.7 Basket-Optionen

Bisher haben wir nur Call- und Put-Optionen betrachtet, die sich auf genau einen Basiswert beziehen. Es gibt aber auch Optionen auf ein Portfolio (oder Paket) von Basiswerten, die unter dem Namen *Basket-Optionen* bekannt sind. Diese lassen sich ebenfalls in europäische und amerikanische Basket-Optionen sowie in Calls und Puts unterteilen.

Definition 13 (Portfolio) *Unter einem Portfolio versteht man eine Kombination mehrerer Finanzinstrumente, deren Wertentwicklung als Ganzes gesehen wird. Ein einzelnes Finanzinstrument in einem Portfolio wird auch Position genannt.*

Definition 14 (Basket-Option) *Eine Basket-Option stellt eine Option dar, deren Auszahlung von dem Wert eines Portfolios aus mehreren Basiswerten abhängt.*

Die Basket-Option weist das folgende Auszahlungsprofil auf:

$$\text{Call: } \theta(S_1, \dots, S_n) = \left(\sum_{k=1}^n S_k(T) - K \right)^+, \quad (1.14a)$$

$$\text{Put: } \theta(S_1, \dots, S_n) = \left(K - \sum_{k=1}^n S_k(T) \right)^+. \quad (1.14b)$$

Aufgrund ihrer Beschaffenheit ist die Basket-Option kosteneffektiver, als würde man für jeden dort enthaltenen Basiswert eine eigene Option kaufen, denn sie weist eine niedrigere Volatilität und in einem realen Markt auch niedrigere Transaktionskosten auf. Bei der Ansammlung einzelner Optionen sind Transaktionskosten für jede Option zu zahlen, wohingegen bei einer Basket-Option nur einmal Transaktionskosten fällig werden. Zusätzlich bildet das Auszahlungsprofil einer Basket-Option den Wert des Portfolios genauer wieder als jede Kombination von Optionen bezüglich eines Basiswertes. Diese Eigenschaften führen dazu, dass Basket-Optionen als Hedging-Objekte in ihrer Popularität steigen, obwohl ihre Preisbestimmung komplizierter ist als bei einfachen Optionen. Diese Schwierigkeit ist darauf zurückzuführen, dass die Summe von log-normalverteilten Zufallsvariablen nicht wieder log-normalverteilt ist. Folglich gibt es für Basket-Optionen anders als im eindimensionalen Fall keine geschlossenen Lösungsformeln. Dadurch kann die Lösungsfindung nicht direkt erfolgen, sondern nur über Approximationsmethoden oder numerische Lösungsverfahren, die wir im Kapitel 4 kurz erläutern werden.

Für die Preisbestimmung wird angenommen, dass jeder Basiswert im Portfolio einer geometrischen Brownschen Bewegung mit konstanter Volatilität folgt und die Korrelation (Kovarianz) jedes einzelnen Basiswertes zu allen anderen Basiswerten konstant ist. Aus diesem Grund kann die Preisberechnung wieder über die berühmte Black-Scholes-Gleichung erfolgen, die aber noch auf eine beliebige Anzahl von Basiswerten erweitert werden muss. Die daraus resultierende *mehrdimensionale Black-Scholes-Gleichung* hat folgende Gestalt:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \rho_{kl} \sigma_k \sigma_l S_k S_l \frac{\partial^2 V}{\partial S_k \partial S_l} + \sum_{k=1}^n (r - D_k) S_k \frac{\partial V}{\partial S_k} - rV = 0, \quad (1.15)$$

wobei ρ_{ij} für $i \neq j$ der Korrelationskoeffizient ($\rho_{ii} := 1$), $0 \leq D_k < r$ ($k = 1, \dots, n$) und n die Anzahl, der im Portfolio enthaltenen Basiswerte sind.

Wegen ihrer Popularität und der Bewertungsschwierigkeit wollen wir uns in dieser Arbeit mit der Preisbestimmung von Basket-Optionen auseinandersetzen.

Kapitel 2

Bewertung von europäischen Optionen

In diesem Kapitel wollen wir uns nun explizit mit der analytischen Bewertung von europäischen Call- und Put-Optionen befassen, auf deren Basiswert kontinuierliche Dividenden ausgeschüttet werden. Für die Bewertung benötigen wir die modifizierte Black-Scholes-Gleichung (1.12) aus Kapitel 1.5:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S}(S, t) - rV(S, t) = 0,$$

die auf der Menge $(S, t) \in [0, \infty) \times [0, T]$ zu lösen ist, wobei $0 \leq D < r$ gelten soll. Da diese partielle Differentialgleichung viele Lösungen hat, müssen wir sie mit Hilfe der bereits bekannten Rand- und Endbedingungen für den europäischen Call (1.13) und für den europäischen Put (1.9) auf unsere Problemstellung beschränken. Die Black-Scholes-Gleichung können wir nun eindeutig lösen und erhalten eine geschlossene Lösungsformel, die unter dem Namen *Black-Scholes-Formel* bekannt ist. Die Herleitung der Lösung führen wir zunächst in Abschnitt 2.1 für den europäischen Call $V(S, t) = c(S, t)$ in kurzen Schritten vor. Eine ausführlichere Herleitung ist in zahlreichen Büchern zu finden (z.B. [16], [34]). Wir befassen uns im darauffolgenden Abschnitt 2.2 mit dem Wert der europäischen Put-Option und im Abschnitt 2.3 interpretieren wir dann die ermittelten Lösungen.

2.1 Die europäische Call-Option

Für eine europäische Call-Option bezüglich eines Basiswertes, auf den kontinuierliche Dividenden ausgeschüttet werden können, lautet die modifizierte Black-Scholes-Gleichung mit den dazugehörigen End- und Randbedingungen:

$$\frac{\partial c}{\partial t}(S, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2}(S, t) + (r - D)S \frac{\partial c}{\partial S}(S, t) - rc(S, t) = 0, \quad (2.1a)$$

für $(S, t) \in (0, \infty) \times [0, T)$, $0 \leq D < r$,

mit der Endbedingung:

$$c(S, T) = (S_T - K)^+ \quad (2.1b)$$

und den Randbedingungen

$$c(0, t) = 0, \quad (2.1c)$$

$$c(S, t) \xrightarrow{S_t \rightarrow \infty} S_t e^{-D(T-t)} - K e^{-r(T-t)} \sim S_t e^{-D(T-t)}. \quad (2.1d)$$

Diese Gleichung stellt eine sogenannte Rückwärts-Differentialgleichung mit Endwert dar, weil der Wert $c(S, T)$ gegeben und der Wert $c(S, 0)$ gesucht ist. Zur Berechnung dieser Gleichung ist es von Vorteil, ein Anfangswertproblem zu konstruieren, wobei wir die Zeitvariable t durch die Restlaufzeit $\hat{\tau} = T - t$ ersetzen. Des Weiteren wollen wir die Black-Scholes-Gleichung (2.1a) vereinfachen, indem wir sie von weniger Parametern abhängig machen, die zudem auch noch dimensionslos sind. Die benötigten Variablentransformationen seien:

$$x := \ln\left(\frac{S}{K}\right), \quad \tau := \frac{\sigma^2}{2}(T - t), \quad \nu(x, \tau) := \frac{c(S, t)}{K}. \quad (2.2)$$

Unter der Anwendung der Kettenregel auf $c(S, t) = \nu(x, \tau) \cdot K$ können wir nun die Black-Scholes-Gleichung (2.1a) mit Endbedingung (2.1b) auf unser gewünschtes Anfangswertproblem bringen. Hierfür müssen wir zuvor die Endbedingung in die Definition von $\nu(x, 0)$ einsetzen und die Tatsache berücksichtigen, dass $S = K e^x$ für $K \geq 0$ ist. Das entstandene Anfangswertproblem hat die folgende Form:

$$\frac{\partial \nu}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + (1 - \kappa_2) \frac{\partial \nu}{\partial x} + \kappa_1 \nu = 0, \quad (2.3a)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\nu(x, 0) = (e^x - 1)^+, \quad (2.3b)$$

für $x \in \mathbb{R}$, $\tau \in (0, \frac{\sigma^2 T}{2}]$, $\kappa_1 := \frac{2r}{\sigma^2}$ und $\kappa_2 := \frac{2(r-D)}{\sigma^2}$. Zur weiteren Vereinfachung verwenden wir den Ansatz:

$$\nu(x, \tau) := e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau), \quad (2.4)$$

für $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ und erhalten:

$$(\beta - \alpha^2 + (1 - \kappa_2)\alpha + \kappa_1)u + (-2\alpha + 1 - \kappa_2) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (2.5)$$

Diese Gleichung können wir durch Eliminierung der Terme $\frac{\partial u}{\partial x}$ und u auf die bekannte Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ überführen. Hierfür sind die Parameter α und β geeignet zu wählen:

$$\alpha = -\frac{1}{2}(\kappa_2 - 1), \quad \beta = -\frac{1}{4}(\kappa_2 - 1)^2 - \kappa_1.$$

Ersetzen wir nun diese Parameter im Ansatz (2.4), so ergibt sich für unsere Funktion $u(x, \tau)$ die folgende Definition:

$$u(x, \tau) := e^{\frac{1}{2}(\kappa_2 - 1)x + (\frac{1}{4}(\kappa_2 - 1)^2 - \kappa_1)\tau} \nu(x, \tau).$$

Insgesamt folgt dann aus der Gleichung (2.5) die Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (2.6a)$$

mit der Anfangsbedingung

$$u_0(x) := u(x, 0) = (e^{\frac{1}{2}(\kappa_2 + 1)x} - e^{\frac{1}{2}(\kappa_2 - 1)x})^+. \quad (2.6b)$$

Sie kann man mit Hilfe der Fouriertransformation von linearen partiellen Differentialgleichungen gelöst werden. Die Lösung entspricht der folgenden Integralgleichung:

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{\mathbb{R}} u_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds. \quad (2.7)$$

Wenden wir die Anfangsbedingung $u_0(x)$ aus (2.6b) auf das Lösungsintegral (2.7) an und vereinfachen es gleichzeitig mit der Variablentransformation $y = \frac{x-s}{\sqrt{2\tau}}$, so erhalten wir die komplizierte Lösungsformel:

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(\kappa_2 + 1)(\sqrt{2\tau}y + x)} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(\kappa_2 - 1)(\sqrt{2\tau}y + x)} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Diese können wir unter Anwendung der quadratischen Ergänzung und unter Ausnutzung der Symmetrie der Exponentialfunktion auf die folgende Form bringen:

$$u(x, \tau) = e^{\frac{1}{2}(\kappa_2 + 1)x + \frac{1}{4}(\kappa_2 + 1)^2\tau} \mathcal{N}(d_1) - e^{\frac{1}{2}(\kappa_2 - 1)x + \frac{1}{4}(\kappa_2 - 1)^2\tau} \mathcal{N}(d_2),$$

wobei

$$d_{1,2} := \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(\kappa_2 \pm 1)\sqrt{2\tau}$$

und

$$\mathcal{N}(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung ist. Zum Abschluss müssen wir nur noch die Rücktransformation auf die ursprünglichen Variablen $c(S, t) = \nu(x, T - t) \cdot K$ durchführen und erhalten die gesuchte Lösung für den Wert einer europäischen Call-Option. Die *Black-Scholes-Formel für europäische Call-Optionen mit kontinuierlicher Dividendenzahlung* lautet:

$$c(S, t) = S e^{-D(T-t)} \mathcal{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_2), \quad (2.8a)$$

wobei

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - D + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (2.8b)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}, \quad (2.8c)$$

$$\mathcal{N}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \quad (2.8d)$$

Wir haben also eine Lösungsformel für europäische Call-Optionen gefunden, ohne die Randbedingungen explizit zu gebrauchen. Aus diesem Grund müssen wir noch zeigen, dass diese erfüllt sind. Dazu betrachten wir die erste Randbedingung, in der der Kurs des Basiswertes gegen Null strebt. In diesem Fall konvergieren die Terme $d_{1,2}$ gegen $-\infty$ und die Standardnormalverteilung gegen Null. Damit können wir nun zeigen, dass $c(S, t)$ für $S_t \rightarrow 0$ gegen Null konvergiert:

$$c(S, t) = S e^{-D(T-t)} \mathcal{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_2) \rightarrow 0, \quad \text{für } S_t \rightarrow 0$$

und damit ist die erste Randbedingung erfüllt.

Um die zweite Randbedingung zu überprüfen, untersuchen wir das Verhalten für $S \rightarrow \infty$. Hierfür folgt, dass die Standardnormalverteilungen wie folgt konvergieren: $\mathcal{N}(d_1) \rightarrow 1$ und $\mathcal{N}(d_2) \rightarrow 0$. Es gilt:

$$\frac{c(S, t)}{e^{-D(T-t)} S} = \mathcal{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \left(\frac{\mathcal{N}(d_2)}{e^{-D(T-t)} S} \right) \rightarrow 1, \quad \text{für } S_t \rightarrow \infty$$

und wir haben gezeigt, dass für $S_t \rightarrow \infty$ der Callpreis gegen $e^{-D(T-t)} S_t$ strebt, was gerade der zweiten Randbedingung entspricht.

Die Endbedingung $c(S, T) = (S_T - K)^+$ ist nach Konstruktion im Sinne des Grenzwertes $t \rightarrow T$ erfüllt, da der Nenner von $d_{1,2}$ für $t \rightarrow T$ singularär wird. Konkret gilt:

Aus

$$d_1, d_2 \xrightarrow{t \rightarrow T} \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \ln\left(\frac{S}{K}\right) = \begin{cases} +\infty, & \text{für } S > K \\ 0, & \text{für } S = K \\ -\infty, & \text{für } S < K \end{cases}$$

folgt

$$\mathcal{N}(d_{1,2}) \xrightarrow{t \rightarrow T} \begin{cases} 1, & \text{für } S > K \\ \frac{1}{2}, & \text{für } S = K \\ 0, & \text{für } S < K \end{cases}$$

und somit ergibt sich als Endbedingung

$$c(S, t) \xrightarrow{t \rightarrow T} \begin{cases} S - K, & \text{für } S > K \\ 0, & \text{für } S \leq K \end{cases} =: (S - K)^+.$$

2.2 Die europäische Put-Option

Den Wert für eine europäische Put-Option bezüglich eines Basiswertes, auf den kontinuierliche Dividenden gezahlt werden, können wir analog zur Call-Option herleiten. Wir benötigen hierfür die folgende modifizierte Black-Scholes-Gleichung mit den dazugehörigen End- und Randbedingungen:

$$\frac{\partial p}{\partial t}(S, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 p}{\partial S^2}(S, t) + (r - D)S \frac{\partial p}{\partial S}(S, t) - rp(S, t) = 0, \quad (2.9a)$$

für $(S, t) \in (0, \infty) \times [0, T)$, $0 \leq D < r$,

mit der Endbedingung:

$$p(S, T) = (K - S_T)^+ \quad (2.9b)$$

und den Randbedingungen:

$$p(0, t) = Ke^{-r(T-t)}, \quad (2.9c)$$

$$p(S, t) \xrightarrow{S_t \rightarrow \infty} 0. \quad (2.9d)$$

Da diese Herleitung aufwendig ist, wollen wir uns über die Beziehung von europäischen Call- und Put-Optionen, die wir im Kapitel 1.6 Satz 10 angegeben haben, der Lösung nähern. Die Put-Call-Parität ermöglicht uns, den Wert einer Put-Option direkt zu bestimmen, wenn wir den Wert der zugehörigen Call-Option bereits kennen. Damit können wir also mittels der Put-Call-Parität und der Relation $\mathcal{N}(d) + \mathcal{N}(-d) = 1$ die *Black-Scholes-Formel für europäische Put-Optionen mit kontinuierlicher Dividendenzahlung* angeben. Sie lautet:

$$p(S, t) = Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(-d_2) - Se^{-D(T-t)}\mathcal{N}(-d_1), \quad (2.10a)$$

wobei

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r - D + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad (2.10b)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}, \quad (2.10c)$$

$$\mathcal{N}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \quad (2.10d)$$

2.3 Interpretation der Black-Scholes-Formel

Beim Betrachten der Black-Scholes-Formeln für die europäische Call-Option mit kontinuierlicher Dividendenzahlung (2.8):

$$c(S, t) = Se^{-D(T-t)}\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2)$$

und für die europäische Put-Option mit kontinuierlicher Dividendenzahlung (2.10):

$$p(S, t) = Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(-d_2) - Se^{-D(T-t)}\mathcal{N}(-d_1)$$

ist zu erkennen, dass beide Formeln aus zwei Termen bestehen.

Der erste Term von $c(S, t)$:

$$Se^{-D(T-t)}\mathcal{N}(d_1)$$

beschreibt gerade den Wert des zugrundeliegenden Objektes, den der Besitzer des Calls im Falle einer Ausübung seines Kaufrechts beziehen kann.

Der zweite Term:

$$Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2)$$

mindert den ersten Term und entspricht dem Wert des Ausübungspreises, den der Inhaber der Option bezahlen muss, wenn er die Option ausübt.

Das Verhältnis des Basiswertkurses zum Ausgabekurs spiegelt sich in den beiden Termen durch die Variablen d_1 , d_2 wieder.

Analog kann man die zwei Terme auch für den Put erläutern.

Kapitel 3

Bewertung von amerikanischen Optionen

In diesem Kapitel wollen wir die amerikanischen Optionen, auf deren Basiswerte kontinuierliche Dividenden gezahlt werden können, bewerten. Wir wissen aus dem ersten Kapitel, dass die amerikanische im Gegensatz zur europäischen Option das Recht einräumt, die Option zu einem beliebigen Zeitpunkt innerhalb der Laufzeit auszuüben. Solange eine amerikanische Option gehalten wird, entspricht sie einer europäischen Option und die modifizierte Black-Scholes-Gleichung gilt weiterhin. Allerdings werden die Randbedingungen so kompliziert, dass eine analytische Lösung wie im europäischen Fall nicht mehr möglich ist. Deshalb werden wir in diesem Kapitel neben der Formulierung des Preisproblems in verschiedenen Variationen (Abschnitt 3.1 und 3.2) auch einen Überblick von bekannten numerischen Lösungsverfahren in Abschnitt 3.3 geben.

Das vorzeitige Ausübungsmerkmal amerikanischer Optionen sorgt dafür, dass sie wertvoller sind als ihr europäischer Gegenpart. Im Abschnitt 1.6 haben wir uns bereits mit dem Wert amerikanischer Optionen auseinandergesetzt und können deshalb über den Preis die folgenden allgemeinen Angaben machen: Der Preis einer amerikanischen Option setzt sich aus dem Wert der dazu passenden europäischen Option und einer vorzeitigen Ausübungsprämie zusammen und ist nach unten durch seinen inneren Wert beschränkt:

$$\begin{aligned} C(S, t) &= c(S, t) + e(S, t) \geq (S_t - K)^+, \\ P(S, t) &= p(S, t) + e(S, t) \geq (K - S_t)^+. \end{aligned}$$

Demnach können wir den Preis der amerikanischen Option nicht über die modifizierte Black-Scholes-Gleichung (1.12) berechnen, sondern wir müssen ihn über die *modifizierte Black-Scholes-Ungleichung*:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S}(S, t) - rV(S, t) \leq 0 \quad (3.1)$$

ermitteln, wobei $(S, t) \in [0, \infty) \times [0, T]$ und $0 \leq D < r$.

Die Entscheidung, wann das Ausübungsrecht wahrgenommen wird, liegt beim Optionsinhaber. Er wird hier den Zeitpunkt wählen, an dem er den bestmöglichen Gewinn erzielen kann. Der optimale Ausübungszeitpunkt wird unter dem Gesichtspunkt ermittelt, dass der durch die Ausübung erzielte Gewinn unvermittelt als Festgeldanlage mit garantierter Verzinsung bis zum Fälligkeitstermin der Option investiert wird. Er ist genau dann erreicht, wenn der Zinsertrag höher ist, als die noch bis zur Fälligkeit zu erwartende Wertsteigerung der Option durch eventuelle Kursänderungen. Daraus ist ersichtlich, dass der Ausübungszeitpunkt vom aktuellen Kurs des Basiswertes S_t abhängt und somit zeitabhängig ist. Die Kurve, die der kritische Basiswertkurs $S^* = S^*(t)$ bezüglich der Zeit bildet, teilt die S - t -Halbebene $[0, \infty) \times [0, T]$ in die *Halte-* (*out of the money*) und die *Ausübungsregion* (*in the money*) auf:

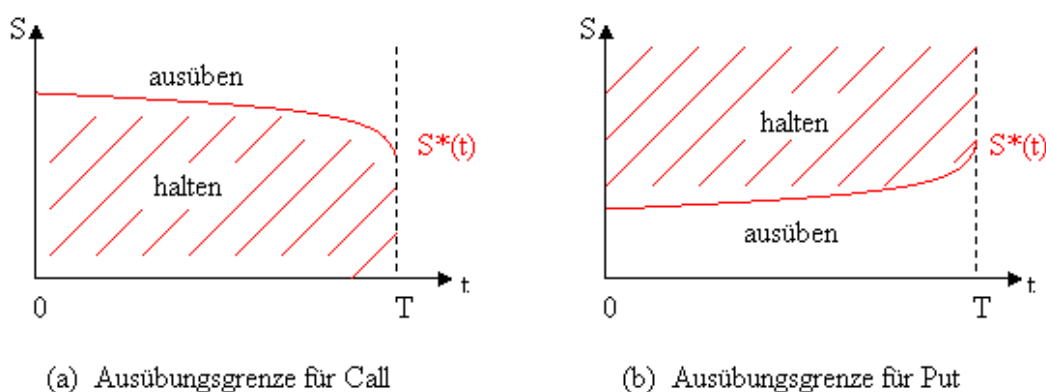


Abbildung 3.1: Ausübungsgrenzen amerikanischer Optionen

In Formeln lassen sich die unterschiedlichen Regionen wie folgt ausdrücken:

$$\begin{array}{ll} \text{Call:} & S_t < S^*(t) : \text{halten,} & S_t \geq S^*(t) : \text{ausüben,} \\ \text{Put:} & S_t \leq S^*(t) : \text{ausüben,} & S_t > S^*(t) : \text{halten.} \end{array}$$

Ist der kritische Basiswertkurs erreicht, so stimmt die Preisfunktion mit ihrem inneren Wert überein. Im Fall einer Call-Option entspricht $S^*(t)$ gerade dem Punkt, in dem die Preisfunktion auf ihren inneren Wert zurückfällt; bei einer Put-Option ist es der letzte Punkt, in dem die Gleichheit zum inneren Wert noch gegeben ist:

$$C(S^*, t) = S^*(t) - K, \quad P(S^*, t) = K - S^*(t).$$

Die Entscheidung, wann die Option ausgeübt wird, trifft man also bezüglich des kritischen Basiswertkurses. Da uns dieser nicht bekannt ist, muss er neben dem Optionspreis ermittelt werden. Dies bedeutet, dass die Bewertung amerikanischer Optionen auf ein freies Randwertproblem führt, bei dem die Black-Scholes-Differentialgleichung nur im Bereich des Kurses S_t gilt, der kleiner als der kritische Call-Basiswertkurs $S_t < S^*(t)$ beziehungsweise größer als der kritische Put-Basiswertkurs $S_t > S^*(t)$ ist, wobei die durch $S^*(t)$ bestimmten Ränder des Gebiets nicht bekannt sind.

3.1 Formulierung als Freies Randwertproblem

Aus dem vorherigen Abschnitt können wir folgern, dass:

$$C(S, t) \begin{cases} > (S_t - K)^+, & \text{für } S_t < S^*(t) \\ = S_t - K, & \text{für } S_t \geq S^*(t) \end{cases} \quad (3.2a)$$

sowie

$$P(S, t) \begin{cases} = K - S_t, & \text{für } S_t \leq S^*(t) \\ > (K - S_t)^+, & \text{für } S_t > S^*(t). \end{cases} \quad (3.2b)$$

Da der kritische Basiswertkurs $S^*(t)$, den wir nun als freien Rand bezeichnen wollen, zu Beginn unbekannt ist, nennt man das Bewerten solcher Finanzderivate ein freies Randwertproblem. Aus Arbitragegründen gilt für den freien Rand: $0 \leq S^*(t) \leq K$.

Bei einer amerikanischen Put-Option weist der freie Rand folgende Eigenschaften auf:

- $S^*(t)$ ist eine stetige, monoton wachsende Funktion der Zeit,
- $S^*(t)$ ist unabhängig von S_0 ,
- $S^*(t) \rightarrow \min\{\frac{rK}{D}, K\}$ (für $t \rightarrow T$), mit Dividendenrate D für Basiswerte mit kontinuierlicher Dividendenauszahlung. Liegt keine Dividendenzahlung vor, so gilt: $S^*(T) = K$.

Um den unbekanntenen freien Rand $S^*(t)$ berechnen zu können, benötigen wir noch zusätzliche Bedingungen, die sogenannten *Glattheitsbedingungen* (*smooth-pasting conditions*), die garantieren, dass $S^*(t)$ selbstfinanzierend und optimal ist.

Die *erste Bedingung* benötigen wir für die Lösung der Black-Scholes-Ungleichung. Sie gilt in der jeweiligen Ausübungsregion und lautet:

$$C(S^*, t) = S^*(t) - K, \quad P(S^*, t) = K - S^*(t). \quad (3.3a)$$

Sie garantiert, dass der Preis der Option ständig über dem freien Rand $S^*(t)$ liegt, da ansonsten Arbitrage auftreten würde.

Des Weiteren müssen wir, um die Position des freien Randes $S^*(t)$ bestimmen zu können, noch eine *zweite Bedingung* an ihn stellen. Diese sorgt dafür, dass die Preisfunktion einer Option ihre Auszahlungsfunktion tangential im Punkt $S^*(t)$ berührt. Sie ist von folgender Form:

$$\left. \frac{\partial C}{\partial S} \right|_{S=S^*(t)} = 1, \quad \left. \frac{\partial P}{\partial S} \right|_{S=S^*(t)} = -1. \quad (3.3b)$$

Diese Bedingungen können mittels Arbitrageargumenten bewiesen werden [34].

Der freie Rand beeinflusst also die Black-Scholes-Ungleichung (3.1): Solange sich die Option in der Halteregion befindet, gilt die Gleichheit, andernfalls die Ungleichheit. Bei der Call-Option wissen wir, dass nach (3.2a) die Preisfunktion in der Ausübungsregion gleich ihrem inneren Wert ist: $C(S, t) = S_t - K$. Wendet man dieses Erkenntnis auf die Black-Scholes-Ungleichung (3.1) an, so ergibt sich für den Fall $S_t \geq S^*(t)$:

$$\frac{\partial C}{\partial t}(S, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S, t) + (r - D)S \frac{\partial C}{\partial S}(S, t) - rC(S, t) = rK - DS. \quad (3.4)$$

Analog kann man für einen amerikanischen Put die Black-Scholes-Ungleichung für den Fall $S_t \leq S^*(t)$ wie folgt schreiben:

$$\frac{\partial P}{\partial t}(S, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}(S, t) + (r - D)S \frac{\partial P}{\partial S}(S, t) - rP(S, t) = -rK + DS. \quad (3.5)$$

Aufgrund dieser Darstellung kann die Black-Scholes-Ungleichung explizit als *inhomogene Black-Scholes-Gleichung* für amerikanische Call-Optionen mit kontinuierlicher Dividendenzahlung geschrieben werden:

$$\frac{\partial C}{\partial t}(S, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S, t) + (r - D)S \frac{\partial C}{\partial S}(S, t) - rC(S, t) = f, \quad (3.6a)$$

für $(S, t) \in (0, \infty) \times [0, T)$ und $0 \leq D < r$,

wobei

$$f = f(S, t) = \begin{cases} 0, & \text{für } 0 < S_t < S^*(t) \\ rK - DS, & \text{für } S_t \geq S^*(t), \end{cases} \quad (3.6b)$$

mit der Endbedingung:

$$C(S, T) = (S_T - K)^+ \quad (3.6c)$$

und den Randbedingungen:

$$C(0, t) = 0, \quad (3.6d)$$

$$C(S, t) \xrightarrow{S_t \rightarrow \infty} \infty. \quad (3.6e)$$

Für amerikanische Put-Optionen mit kontinuierlicher Dividendenzahlung lautet die inhomogene Black-Scholes-Gleichung:

$$\frac{\partial P}{\partial t}(S, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}(S, t) + (r - D)S \frac{\partial P}{\partial S}(S, t) - rP(S, t) = f, \quad (3.7a)$$

für $(S, t) \in (0, \infty) \times [0, T)$ und $0 \leq D < r$,

wobei

$$f = f(S, t) = \begin{cases} -rK + DS, & \text{für } 0 < S_t \leq S^*(t) \\ 0, & \text{für } S_t > S^*(t), \end{cases} \quad (3.7b)$$

mit der Endbedingung:

$$P(S, T) = (K - S_T)^+ \quad (3.7c)$$

und den Randbedingungen:

$$P(0, t) = K, \quad (3.7d)$$

$$P(S, t) \xrightarrow{S_t \rightarrow \infty} 0. \quad (3.7e)$$

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden wir uns auf amerikanische Put-Optionen mit kontinuierlicher Dividendenzahlung beschränken.

3.2 Alternative Formulierungen des Preisproblems

Da das Preisproblem amerikanischer Optionen in der Literatur nicht nur über ein freies Randwertproblem beschrieben wird, wollen wir nun einige alternative Darstellungen erläutern. Im Abschnitt 3.2.1 formulieren wir das Preisproblem als Komplementaritätsproblem und im Abschnitt 3.2.2 geben wir den Optionspreis als Integralgleichung an.

3.2.1 Das lineares Komplementaritätsproblem

Die Darstellung als *lineares Komplementaritätsproblem* können wir über das sogenannte Hindernisproblem erzeugen, das wir zunächst anhand der Abbildung 3.2 erläutern wollen.

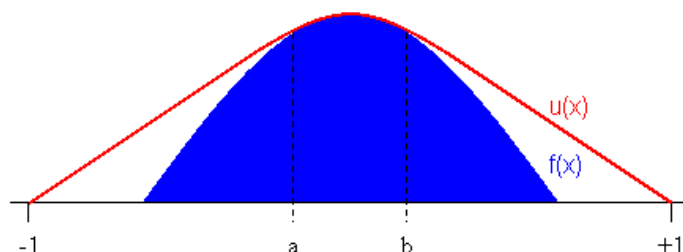


Abbildung 3.2: Hindernisproblem

Wir stellen das Hindernis über die Funktion $f \in C^2(\mathbb{R})$, $f''(x) < 0$ dar und umspannen es mit der Funktion $u(x)$ mit $u \in C^2[-1, +1]$, die eine minimale Länge aufweisen soll.

Der Einfachheit halber sei $u(-1) = u(+1) = 0$. Des Weiteren sei die Funktion $u(x)$ so gewählt, dass sie im Intervall $[a, b]$ mit der Hindernisfunktion $f(x)$ übereinstimmt, aber ansonsten über dieser liegt ($u > f$). Die Ränder a und b seien zunächst unbekannt. Für dieses Beispiel formulieren wir das nachfolgende freie Randwertproblem:

$$u'' = 0, \quad \text{für} \quad -1 < x < \alpha \quad (\Rightarrow u > f), \quad (3.8a)$$

$$u = f, \quad \text{für} \quad \alpha \leq x \leq \beta \quad (\Rightarrow u'' = f'' < 0), \quad (3.8b)$$

$$u'' = 0, \quad \text{für} \quad \beta < x < +1 \quad (\Rightarrow u > f). \quad (3.8c)$$

Die Funktion u stellt eine zusammengesetzte Funktion dar, die die folgende Komplementarität aufzeigt:

- Sie ist eine Gerade ($u'' = 0$), falls $u > f$,
- und u ist konkav ($u'' < 0$), falls $u = f$.

Damit gilt entweder $u'' = 0$ oder $u - f = 0$, aber es gelten nicht beide Eigenschaften gleichzeitig.

Wir können also dieses Hindernisproblem äquivalent als *lineares Komplementaritätsproblem*:

Finde ein $u = u(x)$ so, dass:

$$u''(u - f) = 0, \quad (3.9a)$$

$$-u'' \geq 0, \quad (3.9b)$$

$$u - f \geq 0, \quad (3.9c)$$

wobei $u(-1) = u(+1) = 0$, $u \in C^2[-1, +1]$.

formulieren. Hierin treten die freien Randbedingungen $x = a$ und $x = b$ nicht mehr explizit auf; sie können im Nachhinein von der Lösung abgelesen werden.

Auch bei den amerikanischen Put-Optionen, auf die wir uns hier beschränken wollen, können wir eine Komplementarität entdecken:

- Ist $S_t > S^*(t)$, so gilt $P(S, t) > K - S_t$ und die Black-Scholes-Gleichung.
- Ist $0 \leq S_t \leq S^*(t)$, so gilt $P(S, t) = K - S_t$ und die Black-Scholes-Ungleichung.

Aus diesem Grund lässt sich das Randwertproblem bezüglich eines amerikanischen Puts auf ein lineares Komplementaritätsproblem überführen, das von gleicher Form wie (3.9) ist. Wir geben dieses nun explizit an:

Finde ein $P = P(S, t)$ so, dass:

$$(P - (K - S_t)) \left(-\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} - (r - D) S \frac{\partial P}{\partial S} + rP \right) = 0, \quad (3.10a)$$

$$P - (K - S_t) \geq 0, \quad (3.10b)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} - (r - D) S \frac{\partial P}{\partial S} + rP \geq 0, \quad (3.10c)$$

wobei $(S, t) \in (0, \infty) \times [0, T)$, $0 \leq D < r$,

mit der Endbedingung:

$$P(S, T) = (K - S_T)^+$$

und den Randbedingungen:

$$P(0, t) = K \text{ und } P(S, t) \rightarrow 0, \text{ f\u00fcr } S_t \rightarrow \infty.$$

Der Vorteil dieser Darstellung ist, dass das Problem den freien Rand S^* nicht mehr enth\u00e4lt. Mit Hilfe der Variablentransformationen:

$$x := \ln \left(\frac{S}{K} \right), \quad \tau := \frac{\sigma^2}{2} (T - t), \quad u := \exp \left(\frac{1}{2} (\kappa_2 - 1) x + \left(\frac{1}{4} (\kappa_2 - 1)^2 + \kappa_1 \right) \tau \right) \frac{P}{K},$$

mit $\kappa_1 := \frac{2r}{\sigma^2}$ und $\kappa_2 := \frac{2(r-D)}{\sigma^2}$, wollen wir dieses noch vereinfachen und erhalten das *vereinfachte Komplementarit\u00e4tsproblem*:

Finde ein $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, \tau)$ so, dass:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} \right) (\mathbf{u} - f) = 0, \quad (3.11a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} \geq 0, \quad (3.11b)$$

$$\mathbf{u} - f \geq 0, \quad (3.11c)$$

f\u00fcr $(x, \tau) \in \mathbb{R} \times (0, \frac{\sigma^2}{2} T]$,

mit $u(x, 0) = f(x, 0)$ und $u(x, \tau) = f(x, \tau)$, f\u00fcr $x \rightarrow \infty$,

wobei f\u00fcr den Put die Funktion $f(x, \tau)$ wie folgt definiert ist:

$$f(x, \tau) := e^{\left(\frac{1}{4}(\kappa_2-1)^2 + \kappa_1\right)\tau} \left(e^{\frac{1}{2}(\kappa_2-1)x} - e^{\frac{1}{2}(\kappa_2+1)x} \right)^+.$$

Dieses vereinfachte lineare Komplementaritätsproblem (3.11) kann leider nicht explizit gelöst werden. Wir müssen es approximativ über die Methode der Finiten Differenzen lösen, die wir im Abschnitt 3.3.2 einführen werden. Eine detaillierte Formulierung findet man zum Beispiel in [34, Kapitel 7].

3.2.2 Formulierung als Integralgleichung

In diesem Abschnitt wollen wir die im Kapitel 3.1 hergeleitete inhomogene Black-Scholes-Gleichung für amerikanische Put-Optionen mit kontinuierlicher Dividendenzahlung (3.7a - 3.7b) auf eine Integralgleichung überführen. Zur Herleitung der Integralgleichung benötigen wir eine Vorwärts-Differentialgleichung mit Anfangsbedingung, die wir aus der inhomogenen Black-Scholes-Gleichung, die eine Rückwärts-Differentialgleichung darstellt, mit Hilfe der Variablentransformation $t \rightarrow \tau := T - t$ ermitteln können. Hierbei ist zu beachten, dass: $\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial \tau}$.

Setzt man dies nun in der Rückwärts-Differentialgleichung (3.7a - 3.7b) ein, so erhält man die folgende *Vorwärts-Differentialgleichung* (mit Anfangsbedingung):

$$\frac{\partial P}{\partial \tau}(S, \tau) - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}(S, \tau) - (r - D)S \frac{\partial P}{\partial S}(S, \tau) + rP(S, \tau) = f(S, \tau), \quad (3.12a)$$

für $(S, \tau) \in (0, \infty) \times (0, T]$, $0 \leq D < r$,

wobei

$$f(S, \tau) = \begin{cases} rK - DS, & \text{für } 0 < S_\tau \leq S^*(\tau) \\ 0, & \text{für } S_\tau > S^*(\tau), \end{cases} \quad (3.12b)$$

mit der Anfangsbedingung:

$$P(S, 0) = (K - S_T)^+ \quad (3.12c)$$

und den Randbedingungen:

$$P(0, t) = K, \quad (3.12d)$$

$$P(S, t) \xrightarrow{S_t \rightarrow \infty} 0. \quad (3.12e)$$

Nach dem Satz von Duhamel aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen [21, Seite 70] hat die Gleichung (3.12a - 3.12b) folgende Lösung:

$$P(S, \tau) = e^{-r\tau} \int_0^\infty P(S, 0) \psi(S_\tau; S) dS_\tau + \int_0^\tau e^{-r\xi} \left(\int_0^\infty f(S_\xi, \tau - \xi) \psi(S_\xi; S) dS_\xi \right) d\xi, \quad (3.13)$$

wobei $\psi(S_\tau; S)$ die *Übergangsdichtefunktion* von S_τ mit gegebenem S ist

$$\psi(S_\tau; S) = \frac{1}{S_\tau \sigma \sqrt{2\pi\tau}} \exp \left(-\frac{\left(\ln \left(\frac{S_\tau}{S} \right) - \left(r - D - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau \right)^2}{2\sigma^2\tau} \right). \quad (3.14)$$

Setzen wir nun die Anfangsbedingung (3.12c) und die Definition von der Funktion f (3.12b) in die Lösung der Vorwärts-Differentialgleichung (3.13) ein, so ergibt sich:

$$P(S, \tau) = \underbrace{e^{-r\tau} \int_0^K (K - S_\tau) \psi(S_\tau; S) dS_\tau}_{=p(S, \tau)} + \int_0^\tau e^{-r\xi} \left(\int_0^{S^*(\tau-\xi)} (rK - DS_\xi) \psi(S_\xi; S) dS_\xi \right) d\xi.$$

Durch geeignete Substitution und mit Hilfe der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(\cdot)$ erhalten wir die sogenannte *Kims Integralgleichung* für den Preis einer amerikanischen Put-Option mit kontinuierlicher Dividendenzahlung:

$$P(S, \tau) = \underbrace{e^{-r\tau} K \mathcal{N}(-\hat{d}_2(S(\tau), K, \tau)) - e^{-D\tau} S(\tau) \mathcal{N}(-\hat{d}_1(S(\tau), K, \tau))}_{=p(S, \tau)} + \int_0^\tau \left(rK e^{-r\xi} \mathcal{N}(-\hat{d}_2(S(\tau), S^*(\tau - \xi), \xi)) - DS(\tau) e^{-D\xi} \mathcal{N}(-\hat{d}_1(S(\tau), S^*(\tau - \xi), \xi)) \right) d\xi, \quad (3.15)$$

wobei

$$\hat{d}_{1,2}(x, y, t) := \frac{\ln\left(\frac{x}{y}\right) + \left(r - D \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}.$$

Diese Darstellung wurde 1990 von I. J. Kim [19] eingeführt.

Eine Gleichung für den freien Rand $S^*(\tau)$ erhalten wir aus der Kims Integralgleichung (3.15) unter Anwendung der Randwertbedingung (3.3a):

$$K - S^*(\tau) = p(S^*(\tau), \tau) + \int_0^\tau \left(rK e^{-r\xi} \mathcal{N}(-\hat{d}_2(S^*(\tau), S^*(\tau - \xi), \xi)) - DS^*(\tau) e^{-D\xi} \mathcal{N}(-\hat{d}_1(S^*(\tau), S^*(\tau - \xi), \xi)) \right) d\xi. \quad (3.16)$$

3.3 Lösungsmechanismen im Überblick

Am Anfang dieses Kapitels haben wir bereits erwähnt, dass eine analytische Lösung für amerikanische Optionen nicht mehr möglich ist. Sie können nur approximativ und numerisch gelöst werden. Die numerischen Techniken lassen sich in drei Kategorien unterteilen:

- die *gitterbasierenden Methoden* (z. B.: die Binomialmethode 3.3.1 und die Finite-Differenzen Methode 3.3.2),
- die *rekursiven Integrationsmethoden* (z. B.: von Huang 3.3.3 und von Balakrishna 3.3.4),
- die bekannte *Monte-Carlo Methode* 3.3.5.

Eine ausführliche Übersicht findet man beispielsweise in [4]. Wir wollen hier nur einige Techniken vorstellen, die wir im dritten Teil dieser Arbeit heranziehen werden, um aufzuzeigen, dass unsere Methode zu anderen bereits existierenden Verfahren konkurrenzfähig ist.

3.3.1 Das Binomialmodell

Das *Binomialmodell* wurde 1979 von John Cox, Stephan Ross und Mark Rubinstein entwickelt und ist auch unter dem Namen Cox-Ross-Rubinstein-Modell bekannt. Diese Methode basiert auf einem äquidistanten Gitter und modelliert den stetigen Prozess des Basiswertkurses S_t als eine diskrete Irrfahrt. Das bedeutet, dass dieses Modell ein diskretes Analogon zur geometrischen Brownschen Bewegung darstellt. Hierfür müssen wir die Laufzeit T der Option in n äquidistante Zeitschritte mit der Länge $\Delta t = \frac{T}{n}$ zerlegen und können nun einen n -stufigen Binomialbaum erzeugen. Das Modell beruht, wie der Name bereits erkennen lässt, auf der Annahme, dass sich der Kurs des Basiswertes zu jedem Zeitpunkt nur in eine von zwei Richtungen bewegen kann:

- entweder bewegt er sich mit dem Faktor u und der Wahrscheinlichkeit p aufwärts
- oder er fällt mit dem Faktor d und der Wahrscheinlichkeit $1 - p$.

Des Weiteren soll der Kursbaum der Rekombinationseigenschaft genügen, das heißt, wenn sich der Kurs in zwei direkt aufeinander folgenden Zeitschritten einmal nach oben und einmal nach unten bewegt, so soll er danach wieder in seinen Ausgangspunkt zurückkehren. Dafür sei $u \cdot d = 1$. Den so definierten Kursprozess können wir uns anhand eines *zwei-stufigen Binomialbaums* in Abbildung 3.3 wie folgt vorstellen:

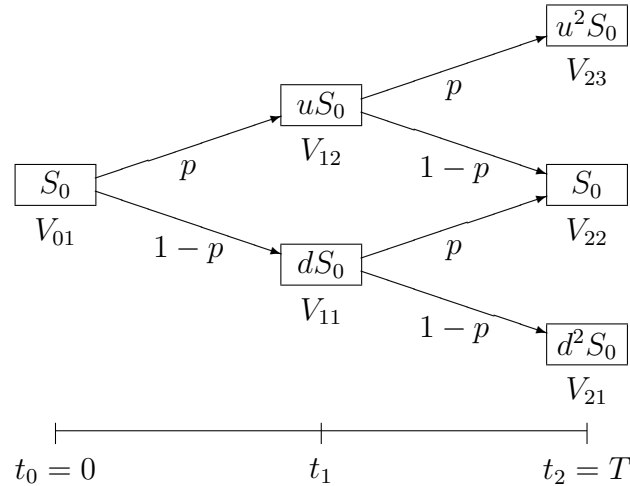


Abbildung 3.3: zwei-stufiger Binomialbaum

In Worten bedeutet dies: Gehen wir von einem beliebigen Kurswert $S_{t_m}^k$ zur Zeit t_m ($m \in \{0, 1\}$, $k \in \{1, \dots, m+1\}$) aus, so kann er im nächsten Zeitschritt t_{m+1} nur die beiden Werte $uS_{t_m}^k =: S_{t_{m+1}}^{k+1}$ und $dS_{t_m}^k =: S_{t_{m+1}}^k$ erreichen und die Wahrscheinlichkeiten dafür sind p beziehungsweise $1-p$ unabhängig von t_m .

Für den Endzeitpunkt $t_n = T$ des Binomialbaums sind uns die Optionswerte bekannt, sie entsprechen gerade ihrem Auszahlungsprofil. Der Wert einer europäischen Option zum Zeitpunkt t_{n-1} wird dann als abgezinster bedingter Erwartungswert der beiden nachfolgenden Optionspreise des Zeitpunktes t_n gegeben dem Kurs zum Zeitpunkt t_{n-1} bestimmt:

$$\begin{aligned} V_{n-1,k} := V(S_{t_{n-1}}^k, t_{n-1}) &= e^{-r\Delta t} E[V(S_T, T) \mid S_{t_{n-1}} = S_{t_{n-1}}^k] \\ &= e^{-r\Delta t} (pV(S_T^{k+1}, T) + (1-p)V(S_T^k, T)). \end{aligned}$$

Dieses Verfahren können wir rekursiv bis zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ anwenden und erhalten nach dem Prinzip der Rückwärtsinduktion den gesuchten Preis für europäische Optionen. Die dafür benötigte *Rekursionsformel* lautet:

Für $m = n-1, \dots, 0$ und $k = 1, \dots, m+1$ gilt:

$$V_{mk} := V(S_{t_m}^k, t_m) = e^{-r\Delta t} (pV(S_{t_{m+1}}^{k+1}, t_{m+1}) + (1-p)V(S_{t_{m+1}}^k, t_{m+1})), \quad (3.17a)$$

wobei

$$V_{nk} := V(S_{t_n}^k, t_n) = V(S_T^k, T). \quad (3.17b)$$

Die Wahrscheinlichkeit p beschreibt ein risikoloses Maß und ist gegeben mit:

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(r - D - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\sqrt{\Delta t}}{\sigma}. \quad (3.17c)$$

Dies liefert uns die wichtige Erkenntnis, dass die tatsächliche Wahrscheinlichkeit, mit der der Kurs fällt oder steigt, im Binomialmodell keine Rolle spielt.

Im Fall von amerikanischen Optionen, die vor dem Laufzeitende ausgeübt werden können, ergeben sich für die Zwischenperioden zwei mögliche Werte: zum einen der abgezinste bedingte Erwartungswert wie bei den europäischen Optionen, zum anderen der innere Wert der Option. Hier entspricht der tatsächliche Wert gerade dem Maximum der beiden Möglichkeiten:

$$V(S_m^k, t_m) = \max \left\{ \begin{array}{l} e^{-r\Delta t} (pV(S_{m+1}^{k+1}, t_{m+1}) + (1-p)V(S_{m+1}^k, t_{m+1})), \\ K - S_m^k \end{array} \right\}. \quad (3.18)$$

Ist das Maximum gerade der innere Wert, so sollte die Option zu diesem Zeitpunkt ausgeübt werden.

Die Hauptvorteile der Binomialmethode liegen in ihrer Einfachheit und der Konvergenz bezüglich der Anzahl der Zeitschritte gegen die Black-Scholes-Gleichung. Ein Nachteil liefert die Annahme, dass der Aktienkurs sich zu jedem Zeitpunkt mit dem gleichen Faktor auf- beziehungsweise abwärts bewegt. Um eine gute Genauigkeit zu erreichen, benötigen wir deshalb eine große Anzahl an Zeitschritten.

3.3.2 Die Finite-Differenzen Methode

Die *Finite-Differenzen Methode* gehört wie die *Binomialmethode* ebenfalls zu den gitterbasierenden Methoden und dient zum numerischen Lösen von partiellen Differentialgleichungen und linearen Komplementaritätsproblemen. Im Abschnitt 3.2.1 haben wir gesehen, dass man das amerikanische Optionspreisproblem auf ein lineares Komplementaritätsproblem überführen kann, das wir nun mit Hilfe dieser Methode lösen können. Die Idee dieser Anwendung geht auf Brennan und Schwartz [3] (1977) zurück.

Das hergeleitete lineare Komplementaritätsproblem für amerikanische Put-Optionen (3.11) hat die folgende Form:

Finde ein $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)$ für $(\mathbf{x}, \tau) \in \mathbb{R} \times (0, \frac{\sigma^2}{2}T]$ so, dass:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} \right) (\mathbf{u} - \mathbf{f}) = \mathbf{0},$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} \geq \mathbf{0},$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{f} \geq \mathbf{0},$$

mit $u(x, 0) = f(x, 0)$ und $u(x, \tau) = f(x, \tau)$, für $x \rightarrow \infty$,

wobei für den Put die Funktion $f(x, \tau)$ wie folgt definiert ist:

$$f(x, \tau) := e^{\left(\frac{1}{4}(\kappa_2-1)^2 + \kappa_1\right)\tau} \left(e^{\frac{1}{2}(\kappa_2-1)x} - e^{\frac{1}{2}(\kappa_2+1)x} \right)^+.$$

Die Finite-Differenzen Methode basiert darauf, die Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ durch Differenzenquotienten zu ersetzen. Hierbei wird das lineare Komplementaritätsproblem über ein äquidistantes Gitter mit den Schrittweiten:

$$\Delta x := \frac{2a}{M} \quad \text{und} \quad \Delta \tau := \frac{\frac{\sigma^2}{2} T}{N}$$

diskretisiert, wobei das Lösungsgebiet $\mathbb{R} \times (0, \frac{\sigma^2}{2} T]$ auf das Rechteck $[-a, a] \times (0, \frac{\sigma^2}{2} T]$ mit einem hinreichend großen $a \in \mathbb{N}$ eingeschränkt werden muss. Des Weiteren müssen die folgenden Randbedingungen gelten:

$$u(-a, \tau) = f(-a, \tau), \quad u(a, \tau) = f(a, \tau). \quad (3.19)$$

Die Ableitung $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ kann einerseits über das Vorwärtsdifferenzieren und andererseits über das Rückwärtsdifferenzieren approximiert werden und hat die folgende Gestalt:

$$\text{vorwärts:} \quad \frac{\partial u}{\partial \tau}(x, \tau) = \frac{u(x, \tau + \Delta \tau) - u(x, \tau)}{\Delta \tau} + O(\Delta \tau), \quad (3.20a)$$

$$\text{rückwärts:} \quad \frac{\partial u}{\partial \tau}(x, \tau) = \frac{u(x, \tau) - u(x, \tau - \Delta \tau)}{\Delta \tau} + O(\Delta \tau). \quad (3.20b)$$

Der Differenzenquotient für $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ kann über die Taylorformel ermittelt werden:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \tau) = \frac{u(x + \Delta x, \tau) - 2u(x, \tau) + u(x - \Delta x, \tau)}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2). \quad (3.21)$$

Kombinieren wir nun die Approximationen der Orts- und Zeitableitungen, so ergeben sich zwei Möglichkeiten: (3.20a) mit (3.21) und (3.20b) mit (3.21). Unter Zuhilfenahme der Variablen $\theta \in [0, 1]$ können wir die beiden Darstellungsvarianten miteinander linear kombinieren und erhalten für $u_m^n = u(x_m, \tau_n) = u(-a + m \cdot \Delta x, n \cdot \Delta \tau)$ mit $m := \{0, \dots, M\}$ und $n := \{0, \dots, N\}$ unter Vernachlässigung der Fehlerterme die Näherung ω_m^n :

$$\begin{aligned} & -\alpha \theta \omega_{m+1}^{n+1} + (2\alpha \theta + 1) \omega_m^{n+1} - \alpha \theta \omega_{m-1}^{n+1} \\ & = \alpha(1 - \theta) \omega_{m+1}^n - (2\alpha(1 - \theta) - 1) \omega_m^n + \alpha(1 - \theta) \omega_{m-1}^n, \end{aligned} \quad (3.22)$$

wobei $m := \{1, \dots, M - 1\}$ und $\alpha = \frac{\Delta \tau}{(\Delta x)^2}$.

Die Endbedingung lautet:

$$\omega_m^0 = f(x_m, 0) \quad (3.23)$$

und die Randbedingungen folgen aus (3.19):

$$\omega_0^n = f(-a, \tau_n), \quad \omega_M^n = f(a, \tau_n). \quad (3.24)$$

Die Näherung (3.22) besteht aus $M - 1$ rekursiven Gleichungen, die wir als lineares Gleichungssystem der Form:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2\alpha\theta + 1 & -\alpha\theta & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha\theta & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\alpha\theta \\ 0 & \cdots & 0 & -\alpha\theta & 2\alpha\theta + 1 \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M-1 \times M-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \omega_1^{n+1} \\ \vdots \\ \omega_{\frac{M}{2}}^{n+1} \\ \vdots \\ \omega_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix}}_{=: \omega^{n+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1^n \\ \vdots \\ b_{\frac{M}{2}}^n \\ \vdots \\ b_{M-1}^n \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{b}^n} \quad (3.25)$$

schreiben können, wobei

$$b_1^n = \alpha(1 - \theta)\omega_2^n - (2\alpha(1 - \theta) - 1)\omega_1^n + \alpha(1 - \theta)\omega_0^n + \alpha\theta f(-a, \tau_{n+1}),$$

$$b_m^n = \alpha(1 - \theta)\omega_{m+1}^n - (2\alpha(1 - \theta) - 1)\omega_m^n + \alpha(1 - \theta)\omega_{m-1}^n,$$

$$b_{M-1}^n = \alpha(1 - \theta)\omega_M^n - (2\alpha(1 - \theta) - 1)\omega_{M-1}^n + \alpha(1 - \theta)\omega_{M-2}^n + \alpha\theta f(a, \tau_{n+1}),$$

für $m := \{2, \dots, M - 2\}$.

Die Wahl von θ liefert uns verschiedene Finite-Differenzen Verfahren, die wir kurz erläutern wollen. Für $\theta = 0$ wird die Matrix \mathbf{A} zur Einheitsmatrix und der Vektor \mathbf{b} besteht nur aus bekannten Größen, sodass wir die Werte ω_m^{n+1} zur Zeit τ_{n+1} explizit berechnen können. Diese Methode heißt daher *explizites Finite-Differenzen Verfahren*, das allerdings nur für $\alpha \leq \frac{1}{2}$ stabil ist.

Wenn wir $\theta = 1$ wählen, so entspricht die Matrix \mathbf{A} einer Tridiagonalmatrix und man muss zur Bestimmung der Werte ω_m^{n+1} ein lineares Gleichungssystem lösen. Diese Methode wird *implizites Finite-Differenzen Verfahren* genannt.

Für $\theta = \frac{1}{2}$ erhalten wir das *Crank-Nicolson-Verfahren*, das ebenfalls das Lösen eines linearen Gleichungssystems in jedem Zeitschritt erfordert. Es hat jedoch den Vorteil, dass der Diskretisierungsfehler von der Größenordnung $O((\Delta\tau)^2 + (\Delta x)^2)$ ist. Bei den beiden anderen Verfahren lag der Fehler bei $O(\Delta\tau + (\Delta x)^2)$.

Damit können wir nun das lineare Komplementaritätsproblem für amerikanische Put-Optionen (3.11a) als diskrete Version schreiben:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}\omega^{n+1} - \mathbf{b}^n)(\omega^{n+1} - \mathbf{f}^n) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}\omega^{n+1} - \mathbf{b}^n &\geq \mathbf{0}, \\ \omega^{n+1} - \mathbf{f}^n &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

mit $\omega_m^0 = f_m^0$ (für $-a \leq m \leq a$), $\omega_{-a}^{n+1} = f_{-a}^{n+1}$ und $\omega_a^{n+1} = f_a^{n+1}$,

wobei $f_m^n := f(x_m, \tau_n)$,

die unter Anwendung des *Projektions-SOR-Verfahrens* nach Cryer [8] gelöst werden kann. Ausführlichere Angaben findet man zum Beispiel in [34].

3.3.3 Die rekursive Integrationsmethode nach Huang

Huang's Methode zur Berechnung des Optionspreises stammt aus dem Jahr 1996 und stellt eine Kombination aus einer analytischen Berechnungsformel und einer Approximationsmethode dar. Die analytische Berechnungsformel, die Huang verwendet, entspricht der *Kims Integralgleichung* (3.15), die den unbekanntem freien Rand $S^*(t)$ als Eingabeparameter benötigt. Dieser lässt sich über die *Integralgleichung* (3.16) rekursiv berechnen. Huang beschleunigt diese rekursive Methode unter Verwendung der sogenannten *Richardson Extrapolationsmethode*, die er auf die Berechnungsformel des Optionspreises anwendet, damit der freie Randwert nur an wenigen Zeitpunkten bestimmt werden muss.

Um die Idee näher erläutern zu können, müssen wir Preise von Optionen definieren, die nur zu n ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) vorgeschriebenen Zeitpunkten ausgeübt werden dürfen. Dafür teilen wir das Zeitintervall $[0, T]$ äquidistant auf, wobei die Schrittweite $\Delta t = \frac{T}{n}$ ist.

Wir führen folgende Notationen ein:

P_0	Preis einer amerikanischen Put-Option zur Zeit $t = 0$,
\tilde{P}_0	geschätzter Wert zu P_0 ,
P_k mit $k \in \{1, \dots, n\}$	Preis einer Option, die nur zu den Zeitpunkten $k\Delta t$ ausgeübt werden kann. P_1 entspricht dem europäischen Put.

Die Folge (P_n) konvergiert gegen den Wert einer amerikanischen Option. Den Grenzwert können wir mit Hilfe einer Linearkombination ermitteln. Sie ist für den Fall $n = 3$ durch das *3-Punkte Richardson Extrapolationsschema*:

$$\begin{aligned}\tilde{P}_0 &= \frac{P_1 - 8P_2 + 9P_3}{2} \\ &= P_3 + \frac{7}{2}(P_3 - P_2) - \frac{1}{2}(P_2 - P_1)\end{aligned}$$

gegeben. Wendet man dieses nun auf die *Kims Integralgleichung* (3.15) an, so erhält man die folgenden Gleichungen für P_k mit $k \in \{1, 2, 3\}$:

$$P_1 = p(S, 0) = e^{-rT} \int_0^K (K - S_T) \psi(S_T; S_0) dS_T, \quad (3.26a)$$

$$\begin{aligned}P_2 &= p(S, 0) + \frac{rKT}{2} e^{-\frac{rT}{2}} \mathcal{N} \left(-d_2 \left(S_0, S^* \left(\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right) \right) \right) \\ &\quad - \frac{DS_0T}{2} e^{-\frac{DT}{2}} \mathcal{N} \left(-d_1 \left(S_0, S^* \left(\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right) \right) \right), \quad (3.26b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_3 = p(S, 0) + \frac{rKT}{3} & \left[e^{-\frac{rT}{3}} \mathcal{N} \left(-d_2 \left(S_0, S^* \left(\frac{T}{3} \right), \frac{T}{3} \right) \right) \right. \\
& \left. + e^{-\frac{2rT}{3}} \mathcal{N} \left(-d_2 \left(S_0, S^* \left(\frac{2T}{3} \right), \frac{2T}{3} \right) \right) \right] \\
- \frac{DS_0T}{3} & \left[e^{-\frac{DT}{3}} \mathcal{N} \left(-d_1 \left(S_0, S^* \left(\frac{T}{3} \right), \frac{T}{3} \right) \right) \right. \\
& \left. + e^{-\frac{2DT}{3}} \mathcal{N} \left(-d_1 \left(S_0, S^* \left(\frac{2T}{3} \right), \frac{2T}{3} \right) \right) \right]. \quad (3.26c)
\end{aligned}$$

Nach dieser Idee benötigt man also nur drei Randwerte – $S^*(\frac{T}{3})$, $S^*(\frac{2T}{3})$, $S^*(\frac{2T}{3})$ – zur Berechnung des Optionspreises. Den exakten Optionspreis erhält man für $n \rightarrow \infty$.

Die Ergebnisse, die diese Methode bezüglich des 4-Punkte Richardson Extrapolations-schemas liefert, verwenden wir in Kapitel 7.1 als Vergleichswerte für unsere Resultate.

3.3.4 Die Methoden von Balakrishna

Balakrishna [1] veröffentlichte seine Methoden 1996 und verwendet wie Huang die Kims Integralgleichung (3.15) als Grundlage, wobei er sie bezüglich der Laufzeit t betrachtet:

$$\begin{aligned}
P(S, t) = p(S, t) + \int_t^T & \left(rK e^{-r(\tau-t)} \mathcal{N}(-\hat{d}_2(S, S^*(\tau), \tau - t)) \right. \\
& \left. - DS e^{-D(\tau-t)} \mathcal{N}(-\hat{d}_1(S, S^*(\tau), \tau - t)) \right) d\tau, \quad (3.27)
\end{aligned}$$

mit

$$\hat{d}_{1,2}(x, y, t) := \frac{\ln\left(\frac{x}{y}\right) + \left(r - D \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}.$$

Diese enthält den unbekanntem freien Rand $S^*(t)$, der über (3.16) bezüglich der Laufzeit t berechnet werden kann, wobei Balakrishna die folgende Darstellung verwendet:

$$\begin{aligned}
S e^{-D(T-t)} \mathcal{N}(\hat{d}_1(S, K, T - t)) + DS \int_t^T & e^{-D(\tau-t)} \mathcal{N}(\hat{d}_1(S, S^*(\tau), \tau - t)) d\tau \\
= \int_t^T & (rK - DS^*(\tau)) e^{-r(\tau-t)} \phi\left(\frac{S^*(\tau)}{S}, \tau - t\right) d\tau, \quad (3.28)
\end{aligned}$$

mit

$$\phi\left(\frac{S^*(\tau)}{S}, \tau - t\right) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{\tau-t}} \exp\left\{-\frac{\left(\ln\left(\frac{S}{S^*(\tau)}\right) + \left(r - D - \frac{\sigma^2}{2}\right)(\tau - t)\right)^2}{2\sigma^2(\tau-t)}\right\}.$$

Über diese Gleichung ist die Bestimmung des freien Randes jedoch so kompliziert, dass Balakrishna diesen mit Hilfe von rekursiven Techniken näherungsweise bestimmt.

Zunächst approximiert Balakrishna diese Gleichung, bevor er sie dann über das einfache iterative Newton-Verfahren löst. Seine Approximationsidee basiert auf dem Monotonieverhalten des freien Randes, welches hinsichtlich der Laufzeit t monoton steigend ist und somit nimmt der freie Rand am Anfang der Laufzeit t seinen kleinsten Wert $\bar{S}(t)$ an.

Die Variablentransformation $S \rightarrow \bar{S}(t)$ liefert mit anschließender Integration:

$$e^{-D(T-t)} \left\{ \mathcal{N}(\hat{d}_1(\bar{S}(t), K, T-t)) - \mathcal{N} \left[\left(r - D + \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\sqrt{T-t}}{\sigma} \right] \right\} \\ = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{rK}{\bar{S}(t)} - \frac{1}{2} \left(r + D + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] \left\{ 2\mathcal{N} \left(\gamma \frac{\sqrt{T-t}}{\sigma} \right) - 1 \right\} - \frac{1}{2}, \quad (3.29)$$

wobei

$$\gamma := \sqrt{\left(r - D + \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 + 2D\sigma^2}.$$

Diese Approximation ist eine nichtlineare Gleichung und zeigt die gleichen Eigenschaften wie der bisherige freie Rand:

$$\begin{aligned} \text{z. B.:} \quad & \bullet S^*(t) \rightarrow K, & \text{für } t \rightarrow T, r \rightarrow \infty \text{ oder } \sigma \rightarrow 0, \\ & \bullet S^*(t) \rightarrow 0, & \text{für } r = 0 \text{ oder } \sigma \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

allerdings kann diese nun rekursiv über die bekannte Newton-Methode für jeden Zeitschritt von T bis t gelöst werden. Hierbei genügt meist ein Newtonschritt, da immer ein guter Startwert zur Verfügung steht, der sich aus dem vorhergehenden Zeitschritt ergibt.

Für den Beginn der Rekursion zum Zeitpunkt T folgt der Wert des freien Randes unmittelbar aus seinen Eigenschaften, die besagen, dass er am Laufzeitende dem Ausübungspreis K entspricht.

Die Resultate, die man mit zehn Gitterpunkten erhält, zeigen bereits eine gute Genauigkeit. Bei 100 Gitterpunkten verringert sich der Fehler im dividendenfreien Fall um ein halbes Prozent [1, Seite 10].

Der so ermittelte freie Rand wird nun verwendet, um das Integral (3.27) zu berechnen, das den Optionspreis als Lösung liefert.

Sollte eine höhere Genauigkeit des Preises gewünscht werden, ist es möglich, Korrekturen zu dem Näherungswert des kritischen Basiswertkurses zu berechnen.

3.3.5 Die Monte-Carlo Methode

In diesem Abschnitt befassen wir uns nun mit der *Monte-Carlo Methode*, die eine direkte und vielseitige Methode darstellt, um den Erwartungswert von komplizierten Ausdrücken zu berechnen.

Im Binomialmodell 3.3.1 haben wir gesehen, dass der Optionspreis auch als abgezinster Erwartungswert von zukünftigen Zahlungsströmen über alle möglichen Basiswertkurse beschrieben werden kann. Wir können also unseren Optionspreis äquivalent schreiben:

$$P(S, t) = e^{-r(T-t)} E[P(X(T; t, S), T)]. \quad (3.30)$$

Die Schwierigkeit in dieser Bewertungsformel liegt in der Berechnung des Erwartungswertes, weshalb wir hierfür die Monte-Carlo Methode anwenden wollen. Die Methode beruht darauf, Zufallsexperimente durchzuführen, die einer Schätzung des Erwartungswertes dienen sollen. Konkret berechnet man den Optionspreis wie folgt:

Zunächst betrachten wir die stochastische Differentialgleichung (1.11)

$$dS_t = (\mu - D)S_t dt + \sigma S_t dX_t \quad (3.31)$$

mit Brownscher Bewegung X_t und gegebener Endbedingung $P(S, T) = (K - S_T)^+$. Mit Hilfe eines Zufallsgenerators erzeugt man nun approximativ $k \in \{k = 1, \dots, N \mid N \in \mathbb{N}\}$ Pfade, die den geforderten Bedingungen an die Brownsche Bewegung X_t genügen. Anschließend wird für jeden Pfad k die stochastische Differentialgleichung (3.31) unter Verwendung numerischer Verfahren gelöst, sodass wir eine Menge von zufälligen Approximationen \tilde{S}_T^k erhalten. Diese benötigen wir dann, um den Erwartungswert approximativ zu bestimmen. Wir erhalten damit eine Näherung des Optionspreises:

$$\tilde{P}(S, t) = e^{-r(T-t)} \tilde{E}[P(S, T)] = e^{-r(T-t)} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N P(\tilde{S}_T^k, T). \quad (3.32)$$

Die Monte-Carlo Methode ist leicht zu verstehen und erlaubt die Verwendung von komplizierten stochastischen Differentialgleichungen, sodass sie auch bei Optionen mit mehreren Basiswerten ihre Anwendung findet. Der Nachteil dieser Methode ist ihre langsame Konvergenz, da für eine genaue Approximation eine große Anzahl N von Simulationen durchgeführt werden müssen. Für dieses Problem gibt es Ansätze zur Konvergenzbeschleunigung wie zum Beispiel die Verwendung einer Varianz-Reduzierung [27] oder die Quasi-Monte-Carlo Techniken [7], die deterministische Pfade der Brownschen Bewegung erzeugen anstatt zufällige Pfade. Allerdings beseitigen sie die eigentliche Problematik, dass eine Vielzahl von Pfaden simuliert werden muss, nicht.

Kapitel 4

Bewertung von Basket-Optionen

In diesem Kapitel wollen wir neben der Erweiterung des Black-Scholes-Modells auf europäische und amerikanische Basket-Optionen, auf deren Basiswerte kontinuierliche Dividenden ausgeschüttet werden können, auch einen Überblick über klassische Bewertungstechniken geben, da bereits ab der Dimension zwei keine geschlossene Lösungsformel mehr existiert.

4.1 Erweiterung des Black-Scholes-Modells auf Basket-Optionen

Für die Erweiterung des Modells auf Optionen mit einer beliebigen Anzahl von Basiswerten benötigen wir die mehrdimensionale Black-Scholes-Gleichung (1.15) aus Kapitel 1.7:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \rho_{kl} \sigma_k \sigma_l S_k S_l \frac{\partial^2 V}{\partial S_k \partial S_l} + \sum_{k=1}^n (r - D_k) S_k \frac{\partial V}{\partial S_k} - rV = 0,$$

welche auf der Menge $0 \leq S_1, \dots, S_n < \infty$, $0 \leq t \leq T$ und $0 \leq D_1, \dots, D_n < r$ zu lösen ist. Da diese partielle Differentialgleichung viele Lösungen hat, müssen wir sie mit Hilfe von Rand- und Endbedingungen auf unsere jeweilige Problemstellung beschränken.

4.1.1 Die europäische Put-Basket-Option

Für eine europäische Put-Basket-Option $p = p(S_1, \dots, S_n, t)$ können wir die bereits bekannten Rand- und Endbedingungen aus dem eindimensionalen Fall (2.9b - 2.9d) verwenden, wobei diese der höheren Dimension angepasst werden müssen. Damit erhalten wir das *Black-Scholes-Modell für eine europäische Put-Basket-Option mit kontinuierlicher Dividendenzahlung*:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \rho_{kl} \sigma_k \sigma_l S_k S_l \frac{\partial^2 p}{\partial S_k \partial S_l} + \sum_{k=1}^n (r - D_k) S_k \frac{\partial p}{\partial S_k} - r p = 0, \quad (4.1a)$$

wobei $0 < S_1, \dots, S_n < \infty$, $0 \leq t < T$ und $0 \leq D_1, \dots, D_n < r$.

Weiterhin müssen noch die Endbedingung:

$$p(S_1, \dots, S_n, T) = \theta(S_1, \dots, S_n) = \left(K - \sum_{k=1}^n S_k(T) \right)^+ \quad (4.1b)$$

und die beiden Randbedingungen:

$$p(0, \dots, 0, t) = K e^{-r(T-t)}, \quad (4.1c)$$

$$p(S_1, \dots, S_n, t) \rightarrow 0, \quad \text{für } \sum_{k=1}^n S_k(t) \rightarrow \infty \quad (4.1d)$$

erfüllt werden.

4.1.2 Die amerikanische Put-Basket-Option

Bei amerikanischen Basket-Optionen können wir ebenfalls die Endbedingung (3.7c) sowie die Glattheitsbedingungen (3.3a - 3.3b) auf die höhere Dimension erweitern. Problematisch ist dagegen die Behandlung des vorzeitigen Ausübungsmerkmals, da wir ein Portfolio aus mehreren Basiswerten betrachten müssen. Im eindimensionalen Fall führte dieses auf ein freies Randwertproblem, wobei der freie Rand zu jedem Zeitpunkt durch einen Punkt definiert war. Bei einem amerikanischen Put auf ein Portfolio aus n Basiswerten $P = P(S_1, \dots, S_n, t)$ ist der freie Rand vom Kurs aller Basiswerte abhängig und entspricht im Fall $n = 2$ zu jedem Zeitpunkt einer Kurve in der (S_1, S_2) -Ebene.

Der freie Rand teilt als Zeitfunktion den Raum $[0, \infty)^n \times [0, T]$ in die *Haltregion* ζ_t der Option, in der der Preis gerade der Lösung der n -dimensionalen Black-Scholes-Gleichung entspricht, und in die *Ausübungsregion* ϵ_t , hier ist der Preis gleich dem inneren Wert der Option.

Zusammenfassend erhalten wir so das *Black-Scholes-Modell für eine amerikanische Put-Basket-Option mit kontinuierlicher Dividendenzahlung*. Es ergibt sich aus der n -dimensionalen inhomogenen Black-Scholes-Gleichung:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \rho_{kl} \sigma_k \sigma_l S_k S_l \frac{\partial^2 P}{\partial S_k \partial S_l} + \sum_{k=1}^n (r - D_k) S_k \frac{\partial P}{\partial S_k} - rP = f, \quad (4.2a)$$

für $0 < S_1, \dots, S_n < \infty$, $0 \leq t < T$ und $0 \leq D_1, \dots, D_n < r$,

wobei

$$f = f(S_1, \dots, S_n, t) = \begin{cases} -rK + \sum_{k=1}^n D_k S_k, & \text{für } (S_1, \dots, S_n) \in \epsilon_t \\ 0, & \text{für } (S_1, \dots, S_n) \in \zeta_t. \end{cases} \quad (4.2b)$$

Weiterhin müssen noch die Endbedingung:

$$P(S_1, \dots, S_n, T) = \theta(S_1, \dots, S_n) = \left(K - \sum_{k=1}^n S_k(T) \right)^+ \quad (4.2c)$$

und die Randbedingungen:

$$P(0, \dots, 0, t) = K, \quad (4.2d)$$

$$P(S_1, \dots, S_n, t) \rightarrow 0, \quad \text{für } \sum_{k=1}^n S_k(t) \rightarrow \infty \quad (4.2e)$$

gelten.

Der freie Rand hat die folgenden Glattheitsbedingungen zu erfüllen:

$$P(S_1^*, \dots, S_n^*, t) = K - \sum_{k=1}^n S_k^*(t), \quad (4.3a)$$

$$\frac{\partial P}{\partial S_1} \Big|_{(S_1^*, \dots, S_n^*)} = \dots = \frac{\partial P}{\partial S_n} \Big|_{(S_1^*, \dots, S_n^*)} = -1, \quad (4.3b)$$

wobei (S_1^*, \dots, S_n^*) Punkte des freien Randes zum Zeitpunkt t sind.

4.2 Lösungsmechanismen im Überblick

Wir wissen bereits, dass es für Basket-Optionen keine geschlossene Lösungsformel gibt, weshalb wir hier einen Überblick bekannter Lösungsmechanismen aufzeigen. Diese sind einerseits durch Approximationsmethoden und andererseits durch numerische Verfahren gegeben.

Die *numerischen Lösungsmethoden* werden in die gitterbasierenden Methoden (z. B. die Finite-Differenzen Methode und die Binomialmethode) und die Monte-Carlo-basierenden Methoden unterteilt. Sie entsprechen den im Abschnitt 3.3 eingeführten numerischen Lösungsmechanismen von Optionen, die sich auf einen Basiswert beziehen, nur dass sie

nun auf höherdimensionale Preisprobleme erweitert werden.

Als Beispiel erläutern wir kurz die *Penalty-Methode*, welche für amerikanische Basket-Optionen entwickelt wurde. Sie addiert zur Black-Scholes-Ungleichung einen sogenannten Strafterm, der im Fall eines Puts dafür sorgt, dass die Black-Scholes-Gleichung nicht unter den Randwert gelangen kann. Damit hat man eine homogene lineare Differentialgleichung erzeugt und kann diese über das semi-implizite finite Differenzenschema lösen. Weitere Angaben zu dieser Methode findet man zum Beispiel in [23].

Die gitterbasierenden Methoden haben aber im mehrdimensionalen Fall den Nachteil, dass der Aufwand der Berechnung exponentiell zur Anzahl der Basiswerte wächst. Aus diesem Grund werden sie in höherer Dimension durch die Monte-Carlo basierenden Methoden ersetzt. Insgesamt weisen die numerischen Lösungsverfahren vor allem bei höherdimensionalen Preisproblemen einen hohen Rechenaufwand auf, sodass man analytische Approximationsmethoden entwickelt hat.

Die analytischen Approximationsmethoden zeichnen sich durch einen geringeren Rechenaufwand aus. Ein mögliches Approximationsverfahren wird von Milevsky und Posner [22] eingeführt. Sie setzen sich mit dem grundlegenden Problem in der Preisberechnung von Basket-Optionen auseinander, dass die Summe von log-normalverteilten Zufallsvariablen nicht wieder log-normalverteilt ist. Dieses konnten sie beheben, indem sie zeigten, dass die Summe von log-normalverteilten Zufallsvariablen gegen die reziproke Gammafunktion konvergiert. Damit waren sie in der Lage die Summe der Basiswertkurse durch ihren Grenzwert zu approximieren und eine geschlossene Lösungsformel für den Preis einer Basket-Option anzugeben.

Teil II

Analytische Lösung der Black-Scholes-Gleichung

Kapitel 5

Optionspreisbestimmung mit der Mellin-Transformation

Nun wollen wir uns mit der von Panini eingeführten Methode zur Optionspreisbestimmung auseinandersetzen. Sie soll zunächst auf europäische und amerikanische Put-Optionen, auf deren Basiswerte kontinuierliche Dividendenzahlungen erfolgen können, angewendet werden. Wir leiten mit Hilfe der Mellin-Transformation, die wir im Anhang B.1 näher erläutern, den Preis aus der modifizierten Black-Scholes-Gleichung (1.12) her und zeigen im Anschluss die Äquivalenz mit bereits bekannten Formeln aus der Literatur.

5.1 Die europäische Put-Option

Die Optionspreisbestimmung einer europäischen Put-Option erfolgt auf Grundlage der modifizierten Black-Scholes-Gleichung (1.12), die wir im Kapitel 1.5 betrachtet haben. Für eine europäische Put-Option hat sie die folgende Gestalt:

$$\frac{\partial p}{\partial t}(S, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 p}{\partial S^2}(S, t) + (r - D)S \frac{\partial p}{\partial S}(S, t) - rp(S, t) = 0, \quad (5.1a)$$

wobei $(S, t) \in (0, \infty) \times [0, T)$ und $0 \leq D < r$. Für eine eindeutige Lösung müssen die folgenden Bedingungen (1.9) erfüllt sein:

$$\text{Endbedingung:} \quad p(S, T) = \theta(S) = (K - S_T)^+, \quad (5.1b)$$

$$1. \text{ Randbedingung:} \quad p(0, t) = K e^{-r(T-t)}, \quad (5.1c)$$

$$2. \text{ Randbedingung:} \quad p(S, t) \rightarrow 0, \quad \text{für } S_t \rightarrow \infty. \quad (5.1d)$$

Diese partielle Differentialgleichung wollen wir nun unter Anwendung der *Mellin-Transformation* lösen. Sie ist auf $p(S, t)$ anwendbar, da die Preisfunktion auf dem Intervall $(0, \infty) \times [0, T)$ lokal integrierbar ist.

5.1.1 Herleitung der Preisfunktion

Für die Herleitung der Preisfunktion müssen wir zuerst den Put-Preis $p(S, t)$ in der modifizierten Black-Scholes-Gleichung (5.1a) durch seine Mellin-Transformation (B.1):

$$\hat{p}(\omega, t) = \int_0^\infty p(S, t) S^{\omega-1} dS$$

ersetzen, die auf dem Streifen $\{\omega \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re}(\omega) < \infty\}$ definiert ist. Damit ergibt sich für (5.1a) die folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{p}}{\partial t}(\omega, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^\infty S^2 \frac{\partial^2 p}{\partial S^2}(S, t) S^{\omega-1} dS \\ + (r - D) \int_0^\infty S \frac{\partial p}{\partial S}(S, t) S^{\omega-1} dS - r \hat{p}(S, t) = 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Mit Hilfe der partiellen Integration können wir die Integrale auf $\hat{p}(\omega, t)$ zurückführen, wobei die Randbedingungen (5.1c - 5.1d) berücksichtigt werden müssen. Insgesamt können wir so die Gleichung (5.2) auf die vereinfachte Form:

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial t}(\omega, t) + \underbrace{\frac{\sigma^2}{2} \left(\omega^2 + \omega - \frac{2(r - D)}{\sigma^2} \omega - \frac{2r}{\sigma^2} \right)}_{=: q(\omega)} \hat{p}(\omega, t) = 0 \quad (5.3)$$

bringen. Diese Gleichung entspricht einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung und besitzt daher die folgende allgemeine Lösung:

$$\hat{p}(\omega, t) = c(\omega) e^{-\frac{\sigma^2}{2} q(\omega) t}, \quad (5.4)$$

wobei $c(\omega)$ die Integrationskonstante darstellt, die noch ermittelt werden muss. Zuvor wollen wir jedoch die Gleichung (5.4) auf $p(S, t)$ zurückführen, wofür wir die *inverse Mellin-Transformation* (B.2):

$$p(S, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{p}(\omega, t) S^{-\omega} d\omega$$

benutzen. Die geeignete Wahl der Konstanten c aus den Integrationsgrenzen ist aus der Definition der Mellin-Transformation ableitbar und muss demnach im Intervall $(0, \infty)$ liegen. Für den gesuchten Put-Optionspreis ergibt sich so die allgemeine Integralgleichung:

$$p(S, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} c(\omega) e^{-\frac{\sigma^2}{2} q(\omega) t} S^{-\omega} d\omega, \quad (5.5)$$

welche die noch zu bestimmende Integrationskonstante $c(\omega)$ enthält. Diese können wir jetzt unter Zuhilfenahme der Endbedingung (5.1b) explizit ermitteln, wobei wir beide Seiten der Endbedingung als inverse Mellin-Transformation betrachten. Daher gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} c(\omega) e^{-\frac{\sigma^2}{2} q(\omega) T} S^{-\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{\theta}(\omega) S^{-\omega} d\omega \quad (5.6)$$

und durch einen Koeffizientenvergleich erhalten wir die gesuchte Integrationskonstante:

$$c(\omega) = \hat{\theta}(\omega) e^{\frac{\sigma^2}{2} q(\omega) T}. \quad (5.7)$$

$\hat{\theta}(\omega)$ ist gerade die Mellin-Transformierte von $\theta(S) = (K - S_T)^+$ (5.1b) und kann unter Anwendung der Definition (B.1) auf bekannte Variablen überführt werden. Die Integration liefert:

$$\hat{\theta}(\omega) = K^{\omega+1} \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega+1} \right). \quad (5.8)$$

Somit haben wir eine *analytische Lösungsformel zur Berechnung des Preises einer europäischen Put-Option bezüglich eines Basiswertes, auf dem kontinuierliche Dividendenzahlungen erfolgen können*, gefunden. Sie lautet:

$$p(S, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{\theta}(\omega) e^{\frac{\sigma^2}{2} q(\omega)(T-t)} S^{-\omega} d\omega, \quad (5.9)$$

wobei $(S, t) \in (0, \infty) \times [0, T)$, $0 \leq D < r$, $c \in (0, \infty)$ und $\{\omega \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re}(\omega) < \infty\}$.

Die Koeffizienten seien wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(\omega) &:= K^{\omega+1} \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega+1} \right), \\ q(\omega) &:= \omega^2 + (1 - \kappa_2)\omega - \kappa_1, \quad \text{mit } \kappa_1 := \frac{2r}{\sigma^2} \text{ und } \kappa_2 := \frac{2(r-D)}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

5.1.2 Äquivalenz zur Black-Scholes-Formel

In diesem Abschnitt wollen wir mit Hilfe des zweiten Faltungstheorems der Mellin-Transformation (B.4b):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{\theta}(\omega) \hat{\phi}(\omega) S^{-\omega} d\omega = \int_0^\infty \theta(u) \phi\left(\frac{S}{u}\right) \frac{1}{u} du \quad (5.10)$$

zeigen, dass die gefundene Lösungsformel (5.9) äquivalent zur Black-Scholes-Formel (2.10) ist.

Hierfür müssen wir zunächst unsere Lösungsformel (5.9) in ihrer Darstellung so verändern, dass der Exponent $\frac{\sigma^2}{2} q(\omega)(T-t)$ nur noch einen von ω abhängigen Term besitzt. Dies können wir mittels der quadratischen Ergänzung erreichen:

$$\frac{\sigma^2}{2} q(\omega)(T-t) = \underbrace{\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}_{=: \alpha} \left[\left(\omega + \underbrace{\frac{1-\kappa_2}{2}}_{=: \beta} \right)^2 - \left(\underbrace{\frac{1-\kappa_2}{2}}_{=: \beta} \right)^2 - \kappa_1 \right]. \quad (5.11)$$

Die veränderte Darstellung unserer Lösungsformel lautet dann:

$$p(S, t) = e^{-\alpha(\beta^2 + \kappa_1)} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\alpha(\omega+\beta)^2} S^{-\omega} d\omega. \quad (5.12)$$

Ein Koeffizientenvergleich zwischen der Lösungsformel (5.12) und der linken Seite von (5.10) liefert uns:

$$\hat{\phi}(\omega) := e^{\alpha(\omega+\beta)^2},$$

welches gerade die Mellin-Transformierte von $\phi(S)$ darstellt und nach der Definition von (B.1) folgt:

$$e^{\alpha(\omega+\beta)^2} = \int_0^\infty \phi(S) S^{\omega-1} dS. \quad (5.13)$$

Unter Anwendung der Integraltransformation [10, Vol.1, Seite 344 (7.2.1)]:

$$\gg e^{\alpha\tilde{\omega}^2} = \int_0^\infty \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{(\ln S)^2}{4\alpha}} S^{\tilde{\omega}-1} dS, \quad \text{wobei } \operatorname{Re}(\alpha) \geq 0 \quad \ll$$

können wir nun den Term $\phi(S)$ aus (5.13) mit $\tilde{\omega} := \omega + \beta$ explizit bestimmen und erhalten:

$$\phi(S, t) = \frac{S^\beta}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln S}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2}. \quad (5.14)$$

Damit haben wir $\phi(S)$ gefunden und können nun das zweite Faltungstheorem (5.10) auf (5.12) anwenden, wobei $\theta(u)$ die Endbedingung (5.1b) darstellt. Es ergibt sich somit:

$$p(S, t) = \underbrace{\frac{e^{-\alpha(\beta^2+\kappa_1)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}}_{=: \gamma} \int_0^K \frac{S^\beta}{u^{\beta+1}} (K-u) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{u}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2} du. \quad (5.15)$$

Diese Darstellung kann in zwei Terme aufgespalten werden, sodass wir insgesamt zwei Integrale zu berechnen haben:

$$p(S, t) = K\gamma S^\beta \underbrace{\int_0^K \frac{1}{u^{\beta+1}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{u}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2} du}_{=: I_1} - \gamma S^\beta \underbrace{\int_0^K \frac{1}{u^\beta} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{u}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2} du}_{=: I_2}. \quad (5.16)$$

Für die Berechnung der beiden Integrale benötigen wir folgende Substitution:

$$\vartheta := \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[\ln\left(\frac{S}{u}\right) - \sigma^2(T-t)\beta \right], \quad (5.17)$$

sodass wir am Ende die gewünschten Integrationsgrenzen für die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung erhalten:

- Für das Integral I_1 : $d_2 := \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - D - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ und ∞ ,
- Für das Integral I_2 : $d_1 := \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - D + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ und ∞ .

Das erste Integral I_1 weist nach der Substitution (5.17) zusammengefasst die folgende Gestalt auf:

$$I_1 = \underbrace{e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t)(\beta^2+\kappa_1)} \sigma \sqrt{2\pi(T-t)}}_{=:\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{S^\beta} e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{d_2}^{\infty} e^{-\frac{\vartheta^2}{2}} d\vartheta, \quad (5.18)$$

wobei wir die Gleichung mit den beiden Faktoren $\sqrt{\frac{2\pi}{2\pi}}$ und $e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t)(\kappa_1-\kappa_1)}$ erweitert haben. Benutzen wir zum Abschluss noch die Symmetrie der Exponentialfunktion, so können wir das Integral mit Hilfe der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{s^2}{2}} ds$ schreiben. Das erste Integral lautet damit:

$$I_1 = \frac{1}{\gamma S^\beta} e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(-d_2). \quad (5.19)$$

Analog berechnet man das zweite Integral I_2 :

$$I_2 := \int_0^K \frac{1}{u^\beta} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(\frac{S}{u})}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2} du = \frac{1}{\gamma S^{\beta-1}} \mathcal{N}(-d_1). \quad (5.20)$$

Ersetzen wir schließlich in der Gleichung (5.16) das Integral I_1 durch (5.19) und das Integral I_2 durch (5.20), so ergibt sich die bekannte Black-Scholes-Formel (2.10) für europäische Put-Optionen, aus deren Basiswerte kontinuierliche Dividenden gezahlt werden können:

$$p(S, t) = K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(-d_2) - S e^{-D(T-t)} \mathcal{N}(-d_1), \quad (5.21)$$

wobei

$$\begin{aligned} d_1 &:= \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - D + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2 &:= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}, \\ \mathcal{N}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{s^2}{2}} ds. \end{aligned}$$

5.2 Die amerikanische Put-Option

Die Optionspreisbestimmung einer amerikanischen Put-Option soll auf Grundlage der inhomogenen Black-Scholes-Gleichung (3.7) erfolgen, die wir im Kapitel 3.1 hergeleitet haben. Für eine amerikanische Put-Option hat sie die folgende Gestalt:

$$\frac{\partial P}{\partial t}(S, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}(S, t) + (r - D) S \frac{\partial P}{\partial S}(S, t) - rP(S, t) = f, \quad (5.22a)$$

für $(S, t) \in (0, \infty) \times [0, T)$ und $0 \leq D < r$,

wobei

$$f = f(S, t) = \begin{cases} -rK + DS, & \text{für } 0 < S_t \leq S^*(t) \\ 0, & \text{für } S_t > S^*(t). \end{cases} \quad (5.22b)$$

Für eine eindeutige Lösung benötigen wir neben der Endbedingung:

$$P(S, T) = (K - S_T)^+ \quad (5.22c)$$

und den Randbedingungen:

$$P(0, t) = K, \quad (5.22d)$$

$$P(S, t) \xrightarrow{S_t \rightarrow \infty} 0 \quad (5.22e)$$

auch die Glattheitsbedingungen (3.3) für den freien Rand $S^*(t)$:

$$P(S^*, t) = K - S^*(t) \quad (5.22f)$$

und

$$\left. \frac{\partial P}{\partial S} \right|_{S=S^*(t)} = -1. \quad (5.22g)$$

Diese inhomogene partielle Differentialgleichung wollen wir nun analog zur europäischen Put-Option unter Anwendung der *Mellin-Transformation* lösen. Sie ist auf $P(S, t)$ und $f(S, t)$ anwendbar, da beide Funktionen auf dem Intervall $(0, \infty) \times [0, T)$ lokal integrierbar sind.

5.2.1 Herleitung der Preisfunktion

Für die Herleitung der Preisfunktion beginnen wir, wie im europäischen Fall, zuerst damit, den Put-Preis $P(S, t)$ und die Funktion für die vorzeitige Ausübungsprämie $f(S, t)$ in der inhomogenen Black-Scholes-Gleichung (5.22a - 5.22b) durch ihre jeweiligen Mellin-Transformationen (B.1):

$$\begin{aligned} \hat{P}(\omega, t) &= \int_0^\infty P(S, t) S^{\omega-1} dS, \\ \hat{f}(\omega, t) &= \int_0^\infty f(S, t) S^{\omega-1} dS \end{aligned}$$

zu ersetzen. Sie sind auf dem Streifen $\{\omega \in \mathbb{C} \mid 0 < \text{Re}(\omega) < \infty\}$ definiert. Die daraus resultierende Gleichung entspricht einer inhomogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung, die sich aus der dazugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung und einer Inhomogenität ergibt. Diese homogene Gleichung kennen wir bereits aus dem europäischen Fall (5.3) und die Inhomogenität ist gerade durch die vorzeitige Ausübungsprämie gegeben, sodass wir die inhomogene Black-Scholes-Gleichung zusammenfassend wie folgt schreiben können:

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial t}(\omega, t) + \frac{\sigma^2}{2} q(\omega) \hat{P}(\omega, t) = \hat{f}(\omega, t) \quad (5.23a)$$

mit

$$q(\omega) := \omega^2 + (1 - k_2)\omega - k_1, \quad k_1 := \frac{2r}{\sigma^2} \quad \text{und} \quad k_2 := \frac{2(r - D)}{\sigma^2}. \quad (5.23b)$$

Die allgemeine Lösung einer solchen inhomogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung hat die folgende Gestalt:

$$\hat{P}(\omega, t) = \left(c(\omega) + \int_T^t \frac{\hat{f}(\omega, x)}{e^{-\frac{\sigma^2}{2}q(\omega)x}} dx \right) e^{-\frac{\sigma^2}{2}q(\omega)t}, \quad (5.24)$$

wobei $c(\omega)$ die Integrationskonstante darstellt. Durch Ausmultiplizieren erhalten wir zwei Terme, wobei der erste mit der Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung (5.4), die wir im europäischen Fall gelöst haben, übereinstimmt:

$$\hat{p}(\omega, t) = c(\omega) e^{-\frac{\sigma^2}{2}q(\omega)t} \quad (5.25)$$

und die Integrationskonstante $c(\omega)$ lautet nach (5.7):

$$c(\omega) = \hat{\theta}(\omega) e^{\frac{\sigma^2}{2}q(\omega)T}.$$

Der zweite Term stellt eine partikuläre Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung dar und enthält den Prämienterm $\hat{f}(\omega, t)$, den wir unter Verwendung der Definition von $f(\omega, t)$ (5.22b) explizit berechnen können:

$$\hat{f}(\omega, t) = -\frac{rK}{\omega} (S^*(t))^\omega + \frac{D}{\omega + 1} (S^*(t))^{\omega+1}. \quad (5.26)$$

Ersetzen wir nun den ersten Summanden durch (5.25) und $\hat{f}(\omega, t)$ durch (5.26), so erhalten wir, nach Vertauschung der Integrationsgrenzen, da $t < T$ ist:

$$\begin{aligned} \hat{P}(\omega, t) = \hat{p}(\omega, t) + \frac{rK}{\omega} \int_t^T (S^*(x))^\omega e^{\frac{\sigma^2}{2}q(\omega)(x-t)} dx \\ - \frac{D}{\omega + 1} \int_t^T (S^*(x))^{\omega+1} e^{\frac{\sigma^2}{2}q(\omega)(x-t)} dx. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Damit wir die gesuchte Preisfunktion einer amerikanischen Put-Option mit kontinuierlicher Dividendenzahlung erhalten, müssen wir die Gleichung (5.27) auf $P(S, t)$ zurückführen, wofür wir die *inverse Mellin-Transformation* (B.2):

$$P(S, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{P}(\omega, t) S^{-\omega} d\omega$$

verwenden. Die Konstante c aus den Integrationsgrenzen liegt im Intervall $(0, \infty)$.

Diese Transformation liefert uns bereits die *Integralgleichung für den Preis einer amerikanischen Put-Option mit kontinuierlicher Dividendenzahlung*:

$$P(S, t) = p(S, t) + \frac{rK}{2\pi i} \int_t^T \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} S^{-\omega} \frac{(S^*(x))^\omega}{\omega} e^{\frac{\sigma^2}{2}q(\omega)(x-t)} d\omega dx - \frac{D}{2\pi i} \int_t^T \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} S^{-\omega} \frac{(S^*(x))^{\omega+1}}{\omega+1} e^{\frac{\sigma^2}{2}q(\omega)(x-t)} d\omega dx, \quad (5.28)$$

wobei $(S, t) \in (0, \infty) \times [0, T)$, $0 \leq D < r$, $c \in (0, \infty)$ und $\{\omega \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re}(\omega) < \infty\}$.

Die Koeffizienten seien wie folgt definiert:

$$q(\omega) := \omega^2 + (1 - \kappa_2)\omega - \kappa_1, \quad \text{mit } \kappa_1 := \frac{2r}{\sigma^2} \text{ und } \kappa_2 := \frac{2(r-D)}{\sigma^2}.$$

Die analytische Lösung einer amerikanischen Put-Option ergibt sich demnach aus dem Preis der dazugehörigen europäischen Put-Option (erster Term) und einer vorzeitigen Ausübungsprämie (zweiter und dritter Term), wobei der dritte Term im dividendenfreien Fall verschwindet.

Die *Integralgleichung für den freien Randwert* folgt sofort aus der oberen Integralgleichung (5.28) mit der Substitution von $S = S^*(t)$ und der ersten Randbedingung von $S^*(t)$ (5.22f):

$$K - S^*(t) = p(S^*(t), t) + \frac{rK}{2\pi i} \int_t^T \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{\omega} \left(\frac{S^*(t)}{S^*(x)} \right)^{-\omega} e^{\frac{\sigma^2}{2}q(\omega)(x-t)} d\omega dx - \frac{D}{2\pi i} \int_t^T \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{\omega+1} S^*(x) \left(\frac{S^*(t)}{S^*(x)} \right)^{-\omega} e^{\frac{\sigma^2}{2}q(\omega)(x-t)} d\omega dx, \quad (5.29)$$

wobei $(S, t) \in (0, \infty) \times [0, T)$, $0 \leq D < r$, $c \in (0, \infty)$ und $\{\omega \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re}(\omega) < \infty\}$.

Die Koeffizienten seien wie folgt definiert:

$$q(\omega) := \omega^2 + (1 - \kappa_2)\omega - \kappa_1, \quad \text{mit } \kappa_1 := \frac{2r}{\sigma^2} \text{ und } \kappa_2 := \frac{2(r-D)}{\sigma^2}.$$

5.2.2 Äquivalenz zur Integralgleichung

Nun wollen wir die gefundene Preisgleichung (5.28) auf eine bekannte Formulierung des Bewertungsproblems zurückführen, nämlich der Kims Integralgleichung (3.15). Da sich diese auf die Zeitvariable $\tau := T - t$ bezieht, müssen wir zunächst die Variablentransformation $t \rightarrow \tau$ durchführen und erhalten:

$$P(S, \tau) = p(S, \tau) + \frac{rK}{2\pi i} \int_0^\tau \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} S^{-\omega} \frac{(S^*(x))^\omega}{\omega} e^{\frac{\sigma^2}{2}q(\omega)(\tau-x)} d\omega dx \\ - \frac{D}{2\pi i} \int_0^\tau \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} S^{-\omega} \frac{(S^*(x))^{\omega+1}}{\omega+1} e^{\frac{\sigma^2}{2}q(\omega)(\tau-x)} d\omega dx.$$

Wir verwenden eine kompaktere Schreibweise der oberen Gleichung unter Verwendung der Definition von $\hat{f}(\omega, x)$ in (5.26):

$$P(S, \tau) = p(S, \tau) - \int_0^\tau \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(\omega, x) \hat{\phi}(\omega, x) S^{-\omega} d\omega dx, \quad (5.30)$$

wobei $\hat{\phi}(\omega, x) = e^{\frac{\sigma^2}{2}q(\omega)(\tau-x)}$ die Mellin-Transformation von $\phi(S, x)$ aus (5.11) ist. Mit Hilfe des ersten Faltungssatzes der Mellin-Transformation (B.4) lässt sich (5.30) wie folgt schreiben:

$$P(S, \tau) = p(S, \tau) - \int_0^\tau \underbrace{\int_0^\infty f(u, x) \phi\left(\frac{S}{u}, x\right) \frac{du}{u}}_{=: \tilde{I}} dx.$$

Ersetzen wir nun $f(u, x)$ durch (5.22b) und $\phi\left(\frac{S}{u}, x\right)$ durch (5.14), so ergibt sich für das innere Integral \tilde{I} :

$$I = \underbrace{\frac{e^{-\alpha(\beta^2 + \kappa_1)}}{\sigma\sqrt{2\pi(\tau-x)}}}_{=: \gamma} S^\beta \left[-rK \underbrace{\int_0^{S^*(x)} \frac{1}{u^{\beta+1}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{u}\right)}{\sigma\sqrt{\tau-x}}\right)^2} du}_{=: \tilde{I}_1} \right. \\ \left. + D \underbrace{\int_0^{S^*(x)} \frac{1}{u^\beta} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{u}\right)}{\sigma\sqrt{\tau-x}}\right)^2} du}_{=: \tilde{I}_2} \right].$$

Die Integrale \tilde{I}_1 und \tilde{I}_2 können analog zu I_1 und I_2 aus (5.16) gelöst werden, da sie sich nur in der oberen Integrationsgrenze unterscheiden. Ihre jeweiligen Lösungen sind dann:

$$\tilde{I}_1 = \frac{1}{\gamma S^\beta} e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(-d_2(S(\tau), S^*(x), \tau-x)), \\ \tilde{I}_2 = \frac{1}{\gamma S^{\beta-1}} \mathcal{N}(-d_1(S(\tau), S^*(x), \tau-x)).$$

Insgesamt erhalten wir mit $\xi := \tau - x$ die gesuchte *Integralgleichung von Kim für amerikanische Put-Optionen mit kontinuierlicher Dividendenauszahlung*:

$$\begin{aligned}
 P(S, \tau) = p(S, \tau) & \\
 & + \int_0^\tau \left(rK e^{-r\xi} \mathcal{N}(-\hat{d}_2(S(\tau), S^*(\tau - \xi), \xi)) \right. \\
 & \quad \left. - DS(\tau) e^{-D\xi} \mathcal{N}(-\hat{d}_1(S(\tau), S^*(\tau - \xi), \xi)) \right) d\xi, \quad (5.31)
 \end{aligned}$$

wobei

$$\hat{d}_{1,2}(x, y, t) := \frac{\ln\left(\frac{x}{y}\right) + \left(r - D \pm \frac{\sigma^2}{2}\right) t}{\sigma\sqrt{t}}.$$

Kapitel 6

Preisbestimmung einer Basket-Option mit Hilfe der Mellin-Transformation

Nun wollen wir die im vorherigen Kapitel entwickelte Optionsbewertungsmethode nach Panini [25] auf höherdimensionale Preisprobleme erweitern. Wir beschäftigen uns hier also mit den Basket-Optionen, auf deren Basiswerte kontinuierliche Dividenden ausgeschüttet werden können, wobei wir uns wieder auf Put-Basket-Optionen beschränken. Der Preis einer Call-Basket-Option kann analog ermittelt werden.

Aus dem Abschnitt 1.7 wissen wir, dass die Basiswerte untereinander Wechselbeziehungen aufweisen können, die über die jeweiligen Korrelationen berücksichtigt werden. Dabei haben wir vorausgesetzt, dass diese konstant und bekannt sind.

Für die Wertbestimmung von Basket-Optionen benötigen wir somit neben den Volatilitäten für jeden Basiswert auch die Korrelationen zwischen ihnen, die in einer sogenannten Korrelationsmatrix dargestellt werden.

Die analytische Lösung des Preisproblems leiten wir analog zum Kapitel 5 her, sodass wir die mehrdimensionale Black-Scholes-Gleichung (1.15) als Grundlage verwenden und diese mit Hilfe der mehrdimensionalen Mellin-Transformation, die wir im Anhang B.2 näher erläutern, lösen.

In den Abschnitten 6.1 und 6.2 sei die Anzahl der Basiswerte von europäischen und amerikanischen Put-Basket-Optionen zunächst auf zwei beschränkt, bevor wir uns in den beiden folgenden Abschnitten 6.3 und 6.4 mit einer beliebigen Anzahl von Basiswerten befassen.

6.1 Die europäische Put-Basket-Option auf zwei Basiswerte

Die Optionspreisbestimmung einer europäischen Put-Basket-Option auf zwei Basiswerte mit kontinuierlicher Dividendenzahlung $p = p(S_1, S_2, t)$ erfolgt auf Grundlage des zweidimensionalen Black-Scholes-Modells (4.1), das wir im Kapitel 4.1.1 betrachtet

haben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 p}{\partial S_1^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 p}{\partial S_1 \partial S_2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 p}{\partial S_2^2} \\ + (r - D_1)S_1 \frac{\partial p}{\partial S_1} + (r - D_2)S_2 \frac{\partial p}{\partial S_2} - rp = 0, \end{aligned} \quad (6.1a)$$

wobei $0 < S_1, S_2 < \infty$, $0 \leq t < T$ und $0 \leq D_1, D_2 < r$.

Für eine eindeutige Lösung müssen noch die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

$$\text{Endbedingung:} \quad p(S_1, S_2, T) = \theta(S_1, S_2) = (K - (S_1(T) + S_2(T)))^+, \quad (6.1b)$$

$$1. \text{ Randbedingung:} \quad p(0, 0, t) = Ke^{-r(T-t)}, \quad (6.1c)$$

$$2. \text{ Randbedingung:} \quad p(S_1, S_2, t) \rightarrow 0, \quad \text{für } (S_1(t) + S_2(t)) \rightarrow \infty. \quad (6.1d)$$

Die Herleitung der Preisgleichung erfolgt wie im eindimensionalen Fall aus Kapitel 5.1.1. Wir können die zweidimensionale Mellin-Transformation (B.5) auf die Funktion $p(S_1, S_2, t)$ anwenden, da die Preisfunktion auf dem Intervall $(0, \infty)^2 \times [0, T]$ lokal integrierbar ist. Sie lautet:

$$\hat{p}(\omega_1, \omega_2, t) = \int_0^\infty \int_0^\infty p(S_1, S_2, t) S_1^{\omega_1-1} S_2^{\omega_2-1} dS_1 dS_2$$

und ist auf $\{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^2 \mid 0 < \text{Re}(\omega_1, \omega_2) < \infty\}$ definiert.

Wir beginnen mit dem Ersetzen von $p = p(S_1, S_2, t)$ in der zweidimensionalen Black-Scholes-Gleichung (6.1a) durch seine Mellin-Transformierte $\hat{p} = \hat{p}(\omega_1, \omega_2, t)$ und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 \int_0^\infty \int_0^\infty S_1^2 \frac{\partial^2 p}{\partial S_1^2} S_1^{\omega_1-1} S_2^{\omega_2-1} dS_1 dS_2 \\ + \rho\sigma_1\sigma_2 \int_0^\infty \int_0^\infty S_1 S_2 \frac{\partial^2 p}{\partial S_1 \partial S_2} S_1^{\omega_1-1} S_2^{\omega_2-1} dS_1 dS_2 \\ + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \int_0^\infty \int_0^\infty S_2^2 \frac{\partial^2 p}{\partial S_2^2} S_1^{\omega_1-1} S_2^{\omega_2-1} dS_1 dS_2 \\ + (r - D_1) \int_0^\infty \int_0^\infty S_1 \frac{\partial p}{\partial S_1} S_1^{\omega_1-1} S_2^{\omega_2-1} dS_1 dS_2 \\ + (r - D_2) \int_0^\infty \int_0^\infty S_2 \frac{\partial p}{\partial S_2} S_1^{\omega_1-1} S_2^{\omega_2-1} dS_1 dS_2 - r\hat{p} = 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Mit Hilfe der partiellen Integration lassen sich die Doppelintegrale aus der oberen Gleichung auf \hat{p} zurückführen, wobei die Randbedingungen (6.1c - 6.1d) berücksichtigt

werden müssen. Damit ergibt sich insgesamt wieder eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung, die folgende vereinfachte Gestalt hat:

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial t}(\omega_1, \omega_2, t) + Q(\omega_1, \omega_2)\hat{p}(\omega_1, \omega_2, t) = 0, \quad (6.3a)$$

mit dem Koeffizienten

$$Q(\omega_1, \omega_2) = \frac{\sigma_1^2}{2}\omega_1^2 + \rho\sigma_1\sigma_2\omega_1\omega_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}\omega_2^2 - (r - D_1 - \frac{\sigma_1^2}{2})\omega_1 - (r - D_2 - \frac{\sigma_2^2}{2})\omega_2 - r. \quad (6.3b)$$

Ihre allgemeine Lösung ist von der Form:

$$\hat{p}(\omega_1, \omega_2, t) = A(\omega_1, \omega_2)e^{-Q(\omega_1, \omega_2)t}, \quad (6.4)$$

wobei $A(\omega_1, \omega_2)$ die noch zu bestimmende Integrationskonstante darstellt. Doch bevor wir diese ermitteln, wollen wir die Gleichung (6.4) zunächst auf unsere Preisfunktion $p(S_1, S_2, t)$ zurückführen. Hierfür verwenden wir die zweidimensionale inverse Mellin-Transformation (B.6):

$$p(S_1, S_2, t) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty} S_1^{-\omega_1} S_2^{-\omega_2} \hat{p}(\omega_1, \omega_2, t) d\omega_1 d\omega_2,$$

deren Konstanten c_1 und c_2 im Intervall $(0, \infty)$ liegen müssen. Für den gesuchten Put-Basket-Optionspreis ergibt sich so die allgemeine Integralgleichung:

$$p(S_1, S_2, t) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty} S_1^{-\omega_1} S_2^{-\omega_2} A(\omega_1, \omega_2) e^{-Q(\omega_1, \omega_2)t} d\omega_1 d\omega_2, \quad (6.5)$$

die noch die unbekannte Integrationskonstante $A(\omega_1, \omega_2)$ enthält. Sie lässt sich analog zur europäischen Put-Option unter Anwendung der Endbedingung (6.1b) bestimmen. Dies bedeutet, dass wir die beiden Seiten der Endbedingung als inverse Mellin-Transformation schreiben und nach einem Koeffizientenvergleich die Integrationskonstante direkt ablesen können. Sie lautet:

$$A(\omega_1, \omega_2) = \hat{\theta}(\omega_1, \omega_2) e^{Q(\omega_1, \omega_2)T}. \quad (6.6)$$

Setzt man nun die ermittelte Integrationskonstante (6.6) in die Gleichung (6.5) ein, so ergibt sich die *Integralgleichung für den Preis einer europäischen Put-Basket-Option bezüglich zweier Basiswerte, auf denen kontinuierliche Dividenden gezahlt werden können*:

$$p(S_1, S_2, t) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty} S_1^{-\omega_1} S_2^{-\omega_2} \hat{\theta}(\omega_1, \omega_2) e^{Q(\omega_1, \omega_2)(T-t)} d\omega_1 d\omega_2, \quad (6.7)$$

wobei $Q(\omega_1, \omega_2)$ über die Gleichung (6.3b) gegeben ist und $\hat{\theta}(\omega_1, \omega_2)$ die Mellin-Transformation von $\theta(S_1, S_2)$ darstellt.

Die Mellin-Transformierte $\hat{\theta}(\omega_1, \omega_2)$ des Auszahlungsterms kann unter Berücksichtigung der Definition (6.1b) wie folgt geschrieben werden:

$$\hat{\theta}(\omega_1, \omega_2) = \int_0^K \int_0^{K-S_1} (K - S_1 - S_2) S_1^{\omega_1-1} S_2^{\omega_2-1} dS_1 dS_2.$$

Diesen Term wollen wir nun noch vereinfachen, wobei wir zwei Möglichkeiten heranziehen können. Einerseits kann der Term mittels der Trapezregel berechnet werden und andererseits lässt er sich über Gamma-Funktionen ausdrücken.

Im weiteren Verlauf werden wir uns mit beiden Verfahren des Vereinfachens beschäftigen, um sie im numerischen Teil dieser Arbeit – im Kapitel 7.2 – miteinander vergleichen zu können.

Bei der ersten Vereinfachung wenden wir die Trapezregel an. Hier ermitteln wir das innere Integral über die Integrationsregeln, bevor wir dann das äußere Integral approximativ über die *N-Punkte Trapezregel* (D.2) berechnen. Wir erhalten somit die *erste Darstellungsvariante von $\hat{\theta}(\omega_1, \omega_2)$* :

$$\hat{\theta}(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{1}{\omega_2} - \frac{1}{\omega_2 + 1} \right) \left(\frac{K}{N} \right)^{\omega_1 + \omega_2 + 1} \left(\sum_{k=1}^{N-1} (N - k)^{\omega_2 + 1} k^{\omega_1 - 1} \right). \quad (6.8)$$

Die zweite Vereinfachung ist die Darstellung von $\hat{\theta}(\omega_1, \omega_2)$ über Gamma-Funktionen. Hier beginnen wir mit dem Ausmultiplizieren und erhalten eine Summe von Doppelintegralen. Die inneren Integrale werden wieder über die bekannten Integrationsregeln berechnet und das äußere Integral lösen wir unter Verwendung der *Beta-Funktion*:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(y, x), \quad \text{mit } \operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0.$$

Damit ergibt sich insgesamt unter Beachtung der *Funktionalgleichung der Gammafunktion* $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$:

$$\hat{\theta}(\omega_1, \omega_2) = K^{\omega_1 + \omega_2 + 1} \left(\frac{\Gamma(\omega_1)\Gamma(\omega_2)}{\Gamma(\omega_1 + \omega_2 + 1)} - \frac{\Gamma(\omega_1 + 1)\Gamma(\omega_2)}{\Gamma(\omega_1 + \omega_2 + 2)} - \frac{\Gamma(\omega_1)\Gamma(\omega_2 + 1)}{\Gamma(\omega_1 + \omega_2 + 2)} \right).$$

Dieser Ausdruck lässt sich noch zusammenfassen und wir erhalten als *zweite Darstellungsvariante von $\hat{\theta}(\omega_1, \omega_2)$* :

$$\hat{\theta}(\omega_1, \omega_2) = K^{\omega_1 + \omega_2 + 1} \frac{\Gamma(\omega_1)\Gamma(\omega_2)}{\Gamma(\omega_1 + \omega_2 + 2)}. \quad (6.9)$$

6.2 Die amerikanische Put-Basket-Option auf zwei Basiswerte

Die Optionspreisbestimmung einer amerikanischen Put-Basket-Option auf zwei Basiswerte mit kontinuierlicher Dividendenzahlung $P = P(S_1, S_2, t)$ erfolgt auf Grundlage des zweidimensionalen Black-Scholes-Modells (4.2), das wir im Kapitel 4.1.2 betrachtet haben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_1^2} + \rho \sigma_1 \sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_1 \partial S_2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_2^2} \\ + (r - D_1)S_1 \frac{\partial P}{\partial S_1} + (r - D_2)S_2 \frac{\partial P}{\partial S_2} - rP = f, \end{aligned} \quad (6.10a)$$

für $0 < S_1, S_2 < \infty$, $0 \leq t < T$ und $0 \leq D_1, D_2 < r$,

wobei

$$f = f(S_1, S_2, t) = \begin{cases} -rK + D_1 S_1 + D_2 S_2, & \text{für } (S_1, S_2) \in \epsilon_t \\ 0, & \text{für } (S_1, S_2) \in \zeta_t. \end{cases} \quad (6.10b)$$

Weiterhin müssen für eine eindeutige Lösung neben der Endbedingung:

$$P(S_1, S_2, T) = \theta(S_1, S_2) = (K - (S_1(T) + S_2(T)))^+ \quad (6.10c)$$

und den Randbedingungen:

$$P(0, 0, t) = K, \quad (6.10d)$$

$$P(S_1, S_2, t) \rightarrow 0, \quad \text{für } (S_1(t) + S_2(t)) \rightarrow \infty \quad (6.10e)$$

auch die Glattheitsbedingungen für den freien Rand (S_1^*, S_2^*) :

$$P(S_1^*, S_2^*, t) = K - (S_1^*(t) + S_2^*(t)) \quad (6.10f)$$

und

$$\left. \frac{\partial P}{\partial S_1} \right|_{(S_1^*, S_2^*)} = \left. \frac{\partial P}{\partial S_2} \right|_{(S_1^*, S_2^*)} = -1 \quad (6.10g)$$

zu jedem Zeitpunkt t gelten.

Die Herleitung der Preisgleichung erfolgt analog zu der europäischen Put-Basket-Option auf zwei Basiswerte mit kontinuierlicher Dividendenzahlung unter Zuhilfenahme der zweidimensionalen Mellin-Transformation (B.5). Sie wird auf die Funktionen $P(S_1, S_2, t)$ und $f(S_1, S_2, t)$ in der Black-Scholes-Gleichung (6.10a) angewendet, was zulässig ist, da beide Funktionen auf dem Intervall $(0, \infty)^2 \times [0, T]$ lokal integrierbar sind. Die Mellin-Transformierten weisen die folgenden Formen auf:

$$\begin{aligned} \hat{P}(\omega_1, \omega_2, t) &= \int_0^\infty \int_0^\infty P(S_1, S_2, t) S_1^{\omega_1-1} S_2^{\omega_2-1} dS_1 dS_2, \\ \hat{f}(\omega_1, \omega_2, t) &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(S_1, S_2, t) S_1^{\omega_1-1} S_2^{\omega_2-1} dS_1 dS_2 \end{aligned}$$

und sind jeweils auf $\{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^2 \mid 0 < \operatorname{Re}(\omega_1, \omega_2) < \infty\}$ definiert. Hieraus ergibt sich eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung, die sich aus einem homogenen Teil, den wir aus dem europäischen Fall (6.3) kennen, und einer Inhomogenität, welche die vorzeitige Ausübungsprämie beschreibt, zusammensetzt. Aus diesem Grund lässt sich die inhomogene Black-Scholes-Gleichung (6.10a) zusammenfassend wie folgt schreiben:

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial t}(\omega_1, \omega_2, t) + Q(\omega_1, \omega_2) \hat{P}(\omega_1, \omega_2, t) = \hat{f}(\omega_1, \omega_2, t), \quad (6.11a)$$

mit dem Koeffizienten $Q(\omega_1, \omega_2)$, welches in (6.3b) wie folgt gegeben ist:

$$Q(\omega_1, \omega_2) = \frac{\sigma_1^2}{2} \omega_1^2 + \rho \sigma_1 \sigma_2 \omega_1 \omega_2 + \frac{\sigma_2^2}{2} \omega_2^2 - (r - D_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}) \omega_1 - (r - D_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}) \omega_2 - r. \quad (6.11b)$$

Aus dem Abschnitt 5.2.1 über amerikanische Put-Optionen wissen wir, wie die Lösung der Differentialgleichung (6.11a) aufgebaut ist:

$$\hat{P}(\omega_1, \omega_2, t) = \hat{p}(\omega_1, \omega_2, t) - \int_t^T \hat{f}(\omega_1, \omega_2, x) e^{Q(\omega_1, \omega_2)(x-t)} dx, \quad (6.12)$$

wobei $\hat{p}(\omega_1, \omega_2, t)$ gerade die Mellin-Transformierte der Lösung der dazugehörigen europäischen Put-Basket-Option (6.7) ist.

Damit wir nun Rückschlüsse auf unsere Preisfunktion $P(S_1, S_2, t)$ ziehen können, wenden wir die zweidimensionale inverse Mellin-Transformation (B.6):

$$P(S_1, S_2, t) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} \int_{c_2 - i\infty}^{c_2 + i\infty} S_1^{-\omega_1} S_2^{-\omega_2} \hat{P}(\omega_1, \omega_2, t) d\omega_1 d\omega_2$$

auf die Gleichung (6.12) an, wobei die Konstanten c_1 und c_2 aus den Integrationsgrenzen im Intervall $(0, \infty)$ liegen. Wir erhalten damit unmittelbar die gesuchte *Integralgleichung für den Preis einer amerikanischen Put-Basket-Option bezüglich zweier Basiswerte mit kontinuierlicher Dividendenzahlung*:

$$P(S_1, S_2, t) = p(S_1, S_2, t) - \int_t^T \left(\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} \int_{c_2 - i\infty}^{c_2 + i\infty} S_1^{-\omega_1} S_2^{-\omega_2} \cdot \hat{f}(\omega_1, \omega_2, x) e^{Q(\omega_1, \omega_2)(x-t)} d\omega_1 d\omega_2 \right) dx, \quad (6.13)$$

wobei \hat{f} die zweidimensionale Mellin-Transformation von f ist, die vom unbekanntem zeitabhängigen freien Rand (S_1^*, S_2^*) abhängig ist:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega_1, \omega_2, x) &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(S_1, S_2, x) S_1^{\omega_1 - 1} S_2^{\omega_2 - 1} dS_1 dS_2 \\ &= \int_{\epsilon_x} \int (-rK + D_1 S_1 + D_2 S_2) S_1^{\omega_1 - 1} S_2^{\omega_2 - 1} dS_1 dS_2. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Die analytische Lösung einer amerikanischen Put-Basket-Option ergibt sich demnach aus dem Preis der dazugehörigen europäischen Put-Basket-Option (erster Term) und einer vorzeitigen Ausübungsprämie (zweiter und dritter Term), wobei der dritte Term im dividendenfreien Fall verschwindet.

Die *Integralgleichung für den freien Rand* erhält man durch die Substitution $S_{1,2} = S_{1,2}^*$ in (6.13) und die Verwendung der ersten Glattheitsbedingung (6.10f), die für den freien Rand gelten muss:

$$K - S_1^* - S_2^* = p(S_1^*, S_2^*, t) - \int_t^T \left(\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} \int_{c_2 - i\infty}^{c_2 + i\infty} S_1^{*-\omega_1} S_2^{*-\omega_2} \cdot \hat{f}(\omega_1, \omega_2, x) e^{Q(\omega_1, \omega_2)(x-t)} d\omega_1 d\omega_2 \right) dx. \quad (6.15)$$

Um die Bestimmung des zweidimensionalen freien Randes (S_1^*, S_2^*) zu vereinfachen, wollen wir diesen so umformulieren, dass der freie Rand S_2^* vom freien Rand S_1^* abhängt. Dafür nehmen wir die folgende Parametrisierung vor:

$$S_2^* =: g(S_1^*), \quad (6.16)$$

wobei zu beachten ist, dass der Punkt $(S_1^*, g(S_1^*))$ zu jedem Zeitpunkt t auf dem freien Rand liegen muss.

Am Laufzeitende $t = T$ entspricht der freie Rand der Geraden $S_1^*(T) + S_2^*(T) = K$, die bezogen auf die Parametrisierung (6.16) folgende Gestalt hat:

$$g(S_1^*(T)) = K - S_1^*(T).$$

Damit ergeben sich die folgenden Randbedingungen für g :

$$g(0) = S_2^B(t), \quad (6.17a)$$

$$g(S_1^B(t)) = 0, \quad (6.17b)$$

die zu jedem Zeitpunkt t erfüllt sein müssen. Die Variablen S_1^B und S_2^B entsprechen den eindimensionalen freien Rändern bezüglich der Basiswerte S_1 beziehungsweise S_2 zur Zeit t .

6.3 Die europäische Put-Basket-Option auf n Basiswerte

Wir wollen nun die Preisberechnung einer europäischen Put-Basket-Option auf ein Portfolio aus beliebig vielen Basiswerten $p = p(S_1, \dots, S_n)$, auf denen kontinuierliche Dividenden gezahlt werden können, erweitern. Hierfür benötigen wir wieder das mehrdimensionale Black-Scholes-Modell (4.1):

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \rho_{kl} \sigma_k \sigma_l S_k S_l \frac{\partial^2 p}{\partial S_k \partial S_l} + \sum_{k=1}^n (r - D_k) S_k \frac{\partial p}{\partial S_k} - rp = 0, \quad (6.18a)$$

wobei $0 < S_1, \dots, S_n < \infty$, $0 \leq t < T$ und $0 \leq D_1, \dots, D_n < r$.

Für eine eindeutige Lösung müssen noch die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

$$\text{Endbedingung: } p(S_1, \dots, S_n, T) = \theta(S_1, \dots, S_n) = \left(K - \sum_{k=1}^n S_k(T) \right)^+, \quad (6.18b)$$

$$1. \text{ Randbedingung: } p(0, \dots, 0, t) = K e^{-r(T-t)}, \quad (6.18c)$$

$$2. \text{ Randbedingung: } p(S_1, \dots, S_n, t) \rightarrow 0, \quad \text{für } \sum_{k=1}^n S_k(t) \rightarrow \infty. \quad (6.18d)$$

Die Preisfunktion $p = p(S_1, \dots, S_n, t)$ ist auf dem Intervall $(0, \infty)^n \times [0, T)$ lokal integrierbar, sodass wir diese wie zuvor unter der Anwendung der n-dimensionalen Mellin-Transformation (B.5) auf p herleiten können. Sie existiert auf der Menge $\{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{C}^n \mid 0 < \text{Re}(\omega_1, \dots, \omega_n) < \infty\}$ und hat die Form:

$$\hat{p}(\omega_1, \dots, \omega_n, t) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty p(S_1, \dots, S_n, t) \prod_{m=1}^n S_m^{\omega_m - 1} dS_1 \dots dS_n.$$

Die Black-Scholes-Gleichung (6.18a) weist nach der Substitution von $p = p(S_1, \dots, S_n, t)$ durch seine Mellin-Transformierte $\hat{p} = \hat{p}(\omega_1, \dots, \omega_n, t)$ die folgende Gestalt auf:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \rho_{kl} \sigma_k \sigma_l \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty S_k S_l \frac{\partial^2 p}{\partial S_k \partial S_l} \prod_{m=1}^n S_m^{\omega_m - 1} dS_1 \dots dS_n \\ + \sum_{k=1}^n (r - D_k) \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty S_k \frac{\partial p}{\partial S_k} \prod_{m=1}^n S_m^{\omega_m - 1} dS_1 \dots dS_n - r \hat{p} = 0. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Die Mehrfach-Integrale lassen sich unter Zuhilfenahme der partiellen Integration und der Randbedingungen (6.18c - 6.18d) auf \hat{p} zurückführen. Dabei ergibt sich wieder eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial t} + Q(\omega_1, \dots, \omega_n) \hat{p} = 0, \quad (6.20a)$$

mit dem Koeffizienten

$$Q(\omega_1, \dots, \omega_n) = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \rho_{kl} \sigma_k \sigma_l \omega_k \omega_l - \sum_{k=1}^n (r - D_k - \frac{\sigma_k^2}{2}) \omega_k - r. \quad (6.20b)$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung (6.20) ist mit:

$$\hat{p}(\omega_1, \dots, \omega_n, t) = A(\omega_1, \dots, \omega_n) e^{-Q(\omega_1, \dots, \omega_n)t} \quad (6.21)$$

gegeben, wobei $A(\omega_1, \dots, \omega_n)$ die unbekannte Integrationskonstante darstellt. Sie wird ermittelt, nachdem wir die Gleichung (6.21) auf unsere Preisfunktion $p(S_1, \dots, S_n)$

überführt haben. Dies erfolgt mit Hilfe der n-dimensionalen inversen Mellin-Transformation (B.6):

$$p(S_1, \dots, S_n, t) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} \cdots \int_{c_n - i\infty}^{c_n + i\infty} \prod_{m=1}^n S_m^{-\omega_m} \hat{p}(\omega_1, \dots, \omega_n, t) d\omega_1 \dots d\omega_n,$$

wobei $c_1, \dots, c_n \in (0, \infty)$. Damit erhalten wir die allgemeine analytische Lösung für den gesuchten Put-Basket-Optionspreis:

$$p(S_1, \dots, S_n, t) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} \cdots \int_{c_n - i\infty}^{c_n + i\infty} \prod_{m=1}^n S_m^{-\omega_m} \cdot A(\omega_1, \dots, \omega_n) e^{-Q(\omega_1, \dots, \omega_n)t} d\omega_1 \dots d\omega_n. \quad (6.22)$$

Die dort enthaltene Integrationskonstante $A(\omega_1, \dots, \omega_n)$ bestimmen wir, indem wir die Gleichung (6.22) zum Zeitpunkt $t = T$ betrachten und die Endbedingung (6.18b) benutzen. Ihre Ermittlung erfolgt analog zu den vorhergehenden Kapiteln 5.1 und 6.1 unter Anwendung der n-dimensionalen Mellin-Transformation auf beiden Seiten der Endbedingung, sodass wir nach einem Koeffizientenvergleich die Integrationskonstante ablesen können:

$$A(\omega_1, \dots, \omega_n) = \hat{\theta}(\omega_1, \dots, \omega_n) e^{Q(\omega_1, \dots, \omega_n)T}. \quad (6.23)$$

Setzt man diese in die Gleichung (6.22) ein, so ergibt sich die *Integralgleichung für den Preis einer europäischen Put-Basket-Option bezüglich n Basiswerte mit kontinuierlicher Dividendenzahlung*:

$$p(S_1, \dots, S_n, t) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} \cdots \int_{c_n - i\infty}^{c_n + i\infty} \prod_{m=1}^n S_m^{-\omega_m} \cdot \hat{\theta}(\omega_1, \dots, \omega_n) e^{Q(\omega_1, \dots, \omega_n)(T-t)} d\omega_1 \dots d\omega_n, \quad (6.24)$$

wobei $Q(\omega_1, \dots, \omega_n)$ über die Gleichung (6.20b) gegeben ist und $\hat{\theta}(\omega_1, \dots, \omega_n)$ die Mellin-Transformation von $\theta(S_1, \dots, S_n)$ darstellt. Sie kann mit Hilfe der Definition (6.18b) wie folgt geschrieben werden:

$$\hat{\theta}(\omega_1, \dots, \omega_n) = \int_0^K \cdots \int_0^{K - \sum_{k=1}^{n-1} S_k} (K - \sum_{k=1}^n S_k) \prod_{m=1}^n S_m^{\omega_m - 1} dS_1 \dots dS_n.$$

Diesen Term können wir analog zum Abschnitt 6.1 vereinfachen, wobei wir ihn einerseits wieder mittels der Trapezregel berechnen und andererseits über die Gammafunktion darstellen werden. Im Kapitel 7.3 werden wir dann beide Varianten numerisch miteinander vergleichen.

Die Anwendung der Trapezregel ist die erste Vereinfachung. Hier berechnen wir das innere Integral über die Integrationsregeln, bevor wir dann die äußeren Integrale nacheinander über die *N-Punkte-Trapezregel* (D.2) approximativ berechnen. Es ergibt sich somit die *erste Darstellungsvariante* von $\hat{\theta}(\omega_1, \dots, \omega_n)$:

$$\hat{\theta}(\omega_1, \dots, \omega_n) = \left(\frac{1}{\omega_n} - \frac{1}{\omega_n + 1} \right) \left(\frac{K}{N} \right)^{1 + \sum_{k=1}^n \omega_k} \cdot \prod_{l=1}^{n-2} \left(\frac{1}{N} \right)^{1 + \omega_n + \sum_{m=1}^l \omega_{n-m}} \cdot \prod_{l=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{N-1} (N - k)^{1 + \sum_{m=1}^l \omega_{n+1-m}} k^{\omega_{n-l}-1} \right). \quad (6.25)$$

Die Darstellung von $\hat{\theta}(\omega_1, \dots, \omega_n)$ über Gamma-Funktionen ist die zweite Vereinfachung. Dabei erzeugen wir zunächst durch Ausmultiplizieren eine Summe von Mehrfach-Integralen, deren inneres Integral wieder über die bekannten Integrationsregeln ermittelt wird und die äußeren Integrale werden nacheinander unter Verwendung der *Beta-Funktion*:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(y, x), \quad \text{mit } \operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0$$

gelöst. Damit ergibt sich insgesamt unter Beachtung der *Funktionalgleichung der Gammafunktion* $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$:

$$\hat{\theta}(\omega_1, \dots, \omega_n) = K^{\sum_{k=1}^n \omega_k + 1} \left(\frac{\prod_{k=1}^n \Gamma(\omega_k)}{\Gamma(\sum_{k=1}^n \omega_k + 1)} - \sum_{l=1}^n \frac{\Gamma(\omega_l + 1) \cdot \prod_{k=1, k \neq l}^n \Gamma(\omega_k)}{\Gamma(\sum_{k=1}^n \omega_k + 2)} \right), \quad (6.26)$$

wobei dieser Ausdruck noch zusammengefasst werden kann und wir erhalten die *zweite Darstellungsvariante* von $\hat{\theta}(\omega_1, \dots, \omega_n)$:

$$\hat{\theta}(\omega_1, \dots, \omega_n) = K^{\sum_{k=1}^n \omega_k + 1} \frac{\prod_{k=1}^n \Gamma(\omega_k)}{\Gamma(\sum_{k=1}^n \omega_k + 2)}. \quad (6.27)$$

Die Beweise zur Existenz der Formeln (6.25) und (6.26) sind im Anhang E zu finden. Sie erfolgen mit Hilfe der vollständigen Induktion über n .

6.4 Die amerikanische Put-Basket-Option auf n Basiswerte

Jetzt befassen wir uns mit der Verallgemeinerung der Preisbestimmung einer amerikanischen Put-Basket-Option auf ein Portfolio aus beliebig vielen Basiswerten mit kontinuierlicher Dividendenzahlung $P = P(S_1, \dots, S_n, t)$. Diese erfolgt auf Grundlage des mehrdimensionalen Black-Scholes-Modells (4.2):

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \rho_{kl} \sigma_k \sigma_l S_k S_l \frac{\partial^2 P}{\partial S_k \partial S_l} + \sum_{k=1}^n (r - D_k) S_k \frac{\partial P}{\partial S_k} - rP = f, \quad (6.28a)$$

für $0 < S_1, \dots, S_n < \infty$, $0 \leq t < T$ und $0 \leq D_1, \dots, D_n < r$,

wobei

$$f = f(S_1, \dots, S_n, t) = \begin{cases} -rK + \sum_{k=1}^n D_k S_k, & \text{für } (S_1, \dots, S_n) \in \epsilon_t \\ 0, & \text{für } (S_1, \dots, S_n) \in \zeta_t. \end{cases} \quad (6.28b)$$

Weiterhin müssen für eine eindeutige Lösung neben der Endbedingung:

$$P(S_1, \dots, S_n, T) = \theta(S_1, \dots, S_n) = \left(K - \sum_{k=1}^n S_k(T) \right)^+ \quad (6.28c)$$

und den Randbedingungen:

$$P(0, \dots, 0, t) = K, \quad (6.28d)$$

$$P(S_1, \dots, S_n, t) \rightarrow 0, \quad \text{für } \sum_{k=1}^n S_k(t) \rightarrow \infty \quad (6.28e)$$

auch die Glattheitsbedingungen für den freien Rand (S_1^*, \dots, S_n^*) :

$$P(S_1^*, \dots, S_n^*, t) = K - \sum_{k=1}^n S_k^*(t) \quad (6.28f)$$

und

$$\frac{\partial P}{\partial S_1} \Big|_{(S_1^*, \dots, S_n^*)} = \dots = \frac{\partial P}{\partial S_n} \Big|_{(S_1^*, \dots, S_n^*)} = -1 \quad (6.28g)$$

zu jedem Zeitpunkt t gelten.

Die Herleitung des Preises erfolgt wieder mit Hilfe der n-dimensionalen Mellin-Transformation (B.5), die auf die Funktionen $P(S_1, \dots, S_n, t)$ und $f(S_1, \dots, S_n, t)$ in (6.28a) angewandt wird. Dies ist zulässig, da beide Funktionen auf dem Intervall $(0, \infty)^n \times [0, T)$

lokal integrierbar sind. Die Mellin-Transformierten haben die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}\hat{P}(\omega_1, \dots, \omega_n, t) &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty P(S_1, \dots, S_n, t) \prod_{m=1}^n S_m^{\omega_m - 1} dS_1 \dots dS_n, \\ \hat{f}(\omega_1, \dots, \omega_n, t) &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty f(S_1, \dots, S_n, t) \prod_{m=1}^n S_m^{\omega_m - 1} dS_1 \dots dS_n\end{aligned}$$

und sind jeweils auf der Menge $\{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{C}^n \mid 0 < \operatorname{Re}(\omega_1, \dots, \omega_n) < \infty\}$ definiert. Es entsteht, wie in den Fällen zuvor, eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Sie besteht aus einem homogenen Teil, der uns von den europäischen Put-Basket-Optionen aus Abschnitt 6.3 (6.20) bekannt ist, und einer Inhomogenität, welche die vorzeitige Ausübungsprämie beschreibt. Aus diesem Grund können wir die inhomogene Gleichung (6.28a) zusammenfassend wie folgt schreiben:

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial t} + Q(\omega_1, \dots, \omega_n) \hat{P} = \hat{f}(\omega_1, \dots, \omega_n, t), \quad (6.29a)$$

mit $Q(\omega_1, \dots, \omega_n)$, welches in (6.20b) wie folgt gegeben ist:

$$Q(\omega_1, \dots, \omega_n) = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \rho_{kl} \sigma_k \sigma_l \omega_k \omega_l - \sum_{k=1}^n (r - D_k - \frac{\sigma_k^2}{2}) \omega_k - r. \quad (6.29b)$$

Die Lösung der Differentialgleichung (6.29a) hat den gleichen Aufbau wie für den eingeschränkten Fall $n = 2$ aus Abschnitt 6.2 (6.12) und lautet:

$$\hat{P}(\omega_1, \dots, \omega_n, t) = \hat{p}(\omega_1, \dots, \omega_n, t) - \int_t^T \hat{f}(\omega_1, \dots, \omega_n, x) e^{Q(\omega_1, \dots, \omega_n)(x-t)} dx, \quad (6.30)$$

wobei $\hat{p}(\omega_1, \dots, \omega_n, t)$ gerade die Mellin-Transformierte der Lösung der dazugehörigen europäischen Put-Basket-Option (6.24) ist.

Um nun die Preisgleichung $P(S_1, \dots, S_n, t)$ angeben zu können, müssen wir die n-dimensionale inverse Mellin-Transformation (B.6):

$$P(S_1, \dots, S_n, t) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} \cdots \int_{c_n - i\infty}^{c_n + i\infty} \prod_{m=1}^n S_m^{-\omega_m} \hat{P}(\omega_1, \dots, \omega_n, t) d\omega_1 \dots d\omega_n$$

auf die Gleichung (6.30) anwenden, wobei die Konstanten c_1, \dots, c_n aus den Integrationsgrenzen im Intervall $(0, \infty)$ liegen. Damit ergibt sich sofort die gesuchte *Integralgleichung für den Preis einer amerikanischen Put-Basket-Option bezüglich n Basiswerte mit kontinuierlicher Dividendenzahlung*:

$$\begin{aligned}
P(S_1, \dots, S_n, t) &= p(S_1, \dots, S_n, t) \\
&- \int_t^T \left(\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} \cdots \int_{c_n - i\infty}^{c_n + i\infty} \prod_{m=1}^n S_m^{-\omega_m} \right. \\
&\quad \left. \cdot \hat{f}(\omega_1, \dots, \omega_n, x) e^{Q(\omega_1, \dots, \omega_n)(x-t)} d\omega_1 \dots d\omega_n \right) dx, \quad (6.31)
\end{aligned}$$

wobei \hat{f} die n-dimensionale Mellin-Transformation von f ist, die vom unbekanntem zeitabhängigen freien Rand (S_1^*, \dots, S_n^*) abhängt:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega_1, \dots, \omega_n, x) &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty f(S_1, \dots, S_n, x) \prod_{m=1}^n S_m^{\omega_m - 1} dS_1 \dots dS_n \\
&= \int_{\epsilon_x} \cdots \int \left(-rK + \sum_{k=1}^n D_k S_k \right) \prod_{m=1}^n S_m^{\omega_m - 1} dS_1 \dots dS_n. \quad (6.32)
\end{aligned}$$

Durch Substitution von $S_{1, \dots, n} = S_{1, \dots, n}^*$ in (6.31) und die Anwendung der ersten Glattheitsbedingung (6.28f) erhalten wir die *Integralgleichung für den freien Rand*:

$$\begin{aligned}
K - \sum_{k=1}^n S_k^* &= p(S_1^*, \dots, S_n^*, t) - \int_t^T \left(\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} \cdots \int_{c_n - i\infty}^{c_n + i\infty} \prod_{m=1}^n S_m^{-\omega_m} \right. \\
&\quad \left. \hat{f}(\omega_1, \dots, \omega_n, x) e^{Q(\omega_1, \dots, \omega_n)(x-t)} d\omega_1 \dots d\omega_n \right) dx. \quad (6.33)
\end{aligned}$$

Auch hier wollen wir uns überlegen, wie wir die Bestimmung des n-dimensionalen freien Randes (S_1^*, \dots, S_n^*) vereinfachen können und formulieren diesen deshalb so um, dass der freie Rand S_n^* vom freien Rand $(S_1^*, \dots, S_{n-1}^*)$ abhängt. Dies gelingt uns mit Hilfe der folgenden Parametrisierung:

$$S_n^* = g(S_1^*, \dots, S_{n-1}^*), \quad (6.34)$$

wobei zu beachten ist, dass der Punkt $(S_1^*, \dots, S_{n-1}^*, g(S_1^*, \dots, S_{n-1}^*))$ zu jedem Zeitpunkt t auf dem freien Rand liegen muss.

Am Laufzeitende $t = T$ entspricht der freie Rand der Hyperebene $\sum_{k=1}^n S_k^*(T) = K$, die bezogen auf die Parametrisierung (6.34) die folgende Gestalt hat:

$$g(S_1^*(T), \dots, S_{n-1}^*(T)) = K - \sum_{k=1}^{n-1} S_k^*(T)$$

zusammen mit den zu (6.17) analogen Randbedingungen an g , die zu jedem Zeitpunkt t erfüllt sein müssen. Die Variable S_n^B entspricht dem eindimensionalen freien Rand bezüglich des Basiswertes S_n zur Zeit t und der Term $(S_1, \dots, S_{n-1})^B$ stellt den freien Rand einer amerikanischen Put-Basket-Option auf die $(n-1)$ Basiswerte S_1, \dots, S_{n-1} zur Zeit t dar.

Teil III

Numerische Lösung der Black-Scholes-Gleichung

Kapitel 7

Numerische Resultate

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der numerischen Lösung des Optionspreissproblems, wobei die analytisch entwickelten Integralgleichungen der Preise aus den Kapiteln 5 und 6 als Grundlage dienen. Hierbei führen wir zunächst Vorbetrachtungen durch, bevor wir zur numerischen Umsetzung gelangen, die in MATLAB der Version 6.0.0.88 Release 12 erfolgt. Die erhaltenen Resultate werden wir anschließend aus und vergleichen sie mit Ergebnissen bekannter Verfahren, um ihre Genauigkeit zu prüfen. Die in diesem Zusammenhang angegebenen Laufzeiten sind CPU-Laufzeiten, die auf einem Rechner mit einem 1.40 GHz Intel Pentium Prozessor und 512 MB Arbeitsspeicher ermittelt wurden.

Im Abschnitt 7.1 betrachten wir zunächst die amerikanische Put-Option, bevor wir uns in den Abschnitten 7.2 und 7.3 mit der europäischen Put-Basket-Option sowie in den Abschnitten 7.4 und 7.5 mit der amerikanischen Put-Basket-Option beschäftigen werden.

7.1 Die amerikanische Put-Option bezüglich eines Basiswertes

Der Preis einer amerikanischen Put-Option bezüglich eines Basiswertes mit kontinuierlicher Dividendenzahlung ist durch die Integralgleichung (5.28) gegeben:

$$P(S, t) = p(S, t) + \frac{rK}{2\pi i} \int_t^T \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} S^{-\omega} \frac{(S^*(x))^\omega}{\omega} e^{\frac{\sigma^2}{2}q(\omega)(x-t)} d\omega dx - \frac{D}{2\pi i} \int_t^T \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} S^{-\omega} \frac{(S^*(x))^{\omega+1}}{\omega+1} e^{\frac{\sigma^2}{2}q(\omega)(x-t)} d\omega dx, \quad (7.1a)$$

wobei die Position des freien Randes $S^*(t)$ aus der Integralgleichung (5.29) gewonnen wird:

$$K - S^*(t) = p(S^*(t), t) + \frac{rK}{2\pi i} \int_t^T \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{\omega} \left(\frac{S^*(t)}{S^*(x)} \right)^{-\omega} e^{\frac{\sigma^2}{2}q(\omega)(x-t)} d\omega dx - \frac{D}{2\pi i} \int_t^T \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{\omega+1} S^*(x) \left(\frac{S^*(t)}{S^*(x)} \right)^{-\omega} e^{\frac{\sigma^2}{2}q(\omega)(x-t)} d\omega dx. \quad (7.1b)$$

7.1.1 Vorbetrachtung

Für eine numerische Berechnung der Lösung des Optionspreises ist es vorteilhaft, eine Transformation bezüglich der Zeitvariablen t vorzunehmen, um aus der Rückwärts-Gleichung eine Vorwärts-Gleichung zu erzeugen. Die dafür benötigte Transformation ist: $\tau := T - t$, wobei τ die verbleibende Restlaufzeit darstellt. Damit lässt sich die Integralgleichung (7.1a) wie folgt schreiben:

$$P(S, \tau) = p(S, \tau) + \frac{rK}{2\pi i} \int_0^\tau \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{\omega} \left(\frac{S(\tau)}{S^*(\tau - \xi)} \right)^{-\omega} e^{\frac{\sigma^2}{2} q(\omega) \xi} d\omega d\xi \\ - \frac{D}{2\pi i} \int_0^\tau \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{\omega + 1} S^*(\tau - \xi) \left(\frac{S(\tau)}{S^*(\tau - \xi)} \right)^{-\omega} e^{\frac{\sigma^2}{2} q(\omega) \xi} d\omega d\xi, \quad (7.2)$$

wobei $\xi := \tau - x$.

Die Schwierigkeit der numerischen Lösung dieser Integralgleichung liegt in der Quadratur der beiden τ -abhängigen Integrale:

$$I = \frac{rK}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{\omega} \left(\frac{S(\tau)}{S^*(\tau - \xi)} \right)^{-\omega} e^{\frac{\sigma^2}{2} q(\omega) \xi} d\omega$$

und

$$J = \frac{DS^*(\tau - \xi)}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{\omega + 1} \left(\frac{S(\tau)}{S^*(\tau - \xi)} \right)^{-\omega} e^{\frac{\sigma^2}{2} q(\omega) \xi} d\omega,$$

weshalb wir uns mit diesen nun gesondert beschäftigen werden.

Zunächst sei dazu $\omega := c + iy$ mit $d\omega = idy$. Des Weiteren führen wir die Rücksubstitution von (5.23b):

$$q(\omega) := \omega^2 + (1 - \kappa_2)\omega - \kappa_1, \quad \text{mit} \quad \kappa_1 := \frac{2r}{\sigma^2} \quad \text{und} \quad \kappa_2 := \frac{2(r - D)}{\sigma^2}$$

auf die ursprünglichen Variablen durch und erhalten somit für die Integrale I und J :

$$I = \frac{rK}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{c + iy} e^{\ln \left[\frac{S(\tau)}{S^*(\tau - \xi)} \right] (-c - iy)} e^{(\alpha\beta'iy + \alpha\beta'c - \alpha c^2 - \alpha y^2 - \xi r)} dy$$

und

$$J = \frac{DS^*(\tau - \xi)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{c + 1 + iy} e^{\ln \left[\frac{S(\tau)}{S^*(\tau - \xi)} \right] (-c - iy)} e^{(\alpha\beta'iy + \alpha\beta'c - \alpha c^2 - \alpha y^2 - \xi r)} dy,$$

mit $\alpha := \frac{\sigma^2}{2}\xi$ und $\beta' := 2c + 1 - \kappa_2$. Mittels der Substitution $\beta := \alpha\beta' - \ln \left[\frac{S(\tau)}{S^*(\tau-\xi)} \right]$, können wir diese verkürzt schreiben:

$$I = \frac{rK}{2\pi} e^{[\beta c - \alpha c^2 - \xi r]} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{c + iy} e^{[\beta iy - \alpha y^2]} dy$$

und

$$J = \frac{DS^*(\tau - \xi)}{2\pi} e^{[\beta c - \alpha c^2 - \xi r]} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{c + 1 + iy} e^{[\beta iy - \alpha y^2]} dy,$$

wobei die beiden Integranden einen komplexen Nenner aufweisen. Diesen wollen wir durch Erweitern der Brüche $\frac{1}{c+iy}$ auf $\frac{c-iy}{c^2+y^2}$ beziehungsweise $\frac{1}{c+1+iy}$ auf $\frac{c+1-iy}{(c+1)^2+y^2}$ reellwertig machen. Die Euler-Formel $e^{\beta iy} = \cos(\beta y) + i \sin(\beta y)$ liefert uns dann:

$$I = \frac{rK}{2\pi} e^{-r\xi} e^{-\alpha c^2 + \beta c} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c \cdot \cos(\beta y) + y \cdot \sin(\beta y)}{c^2 + y^2} e^{-\alpha y^2} dy + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c \cdot \sin(\beta y) - y \cdot \cos(\beta y)}{c^2 + y^2} e^{-\alpha y^2} dy \right]$$

und

$$J = \frac{DS^*(\tau - \xi)}{2\pi} e^{-r\xi} e^{-\alpha c^2 + \beta c} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(c+1) \cdot \cos(\beta y) + y \cdot \sin(\beta y)}{(c+1)^2 + y^2} e^{-\alpha y^2} dy + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(c+1) \cdot \sin(\beta y) - y \cdot \cos(\beta y)}{(c+1)^2 + y^2} e^{-\alpha y^2} dy \right].$$

Der imaginäre Teil in den oberen Gleichungen besteht jeweils aus einem Integral, welches verschwindet, da der Integrand eine Differenz aus der ungeraden Funktion $c \cdot \sin(\beta y)$ beziehungsweise $(c+1) \cdot \sin(\beta y)$ und der geraden Funktion $y \cdot \cos(\beta y)$ ist. Damit lauten die Integrale I und J :

$$I = \frac{rK}{2\pi} e^{-r\xi} e^{-\alpha c^2 + \beta c} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c \cdot \cos(\beta y) + y \cdot \sin(\beta y)}{c^2 + y^2} e^{-\alpha y^2} dy}_{=:F} \quad (7.3a)$$

und

$$J = \frac{DS^*(\tau - \xi)}{2\pi} e^{-r\xi} e^{-\alpha c^2 + \beta c} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(c+1) \cdot \cos(\beta y) + y \cdot \sin(\beta y)}{(c+1)^2 + y^2} e^{-\alpha y^2} dy}_{=:F} \quad (7.3b)$$

Die Integrale F in (7.3a) und \bar{F} in (7.3b) haben für $x := \sqrt{\alpha y}$ die Form $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) dx$ und können somit über das *N-Punkte Gauß-Hermite Quadraturschema* (C.6) berechnet werden.

Für eine höhere Genauigkeit wollen wir aber das *N-Punkte Gauß-Laguerre Quadraturschema* (C.2) anwenden, welches sich auf Integrale der Gestalt $\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx$ bezieht. Aus diesem Grund müssen F und \bar{F} so umgeformt werden, dass sie dieser Darstellung genügen. Hierbei beschränken wir uns auf das Integral F , da \bar{F} analog folgt.

Mit Hilfe der Symmetrie der Winkelfunktionen ergibt sich:

$$F = 2 \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2} \frac{c}{c^2 + y^2} \cos(\beta y) dy}_{=: I_1} + 2 \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2} \frac{y}{c^2 + y^2} \sin(\beta y) dy}_{=: I_2}, \quad (7.4)$$

wobei die beiden Integrale unter Anwendung einer Kosinus- und Sinustransformation berechnet werden können.

Im Integral I_1 benutzen wir die Kosinustransformation:

$$\gg \frac{c}{c^2 + y^2} = \int_0^{\infty} e^{-cx} \cos(xy) dx \ll$$

aus [10, Vol.1, Seite 14 (1.4.1)] und erhalten nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge mit den Additionstheoremen:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-cx}}{2} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2} \cos((\beta + x)y) dy + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2} \cos((\beta - x)y) dy \right] dx. \quad (7.5)$$

Die beiden inneren Integrale werden nun mittels der Integraltransformation [10, Vol.1, Seite 15 (1.4.11)]:

$$\gg \int_0^{\infty} e^{-ay^2} \cos(xy) dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}, \quad \text{für } y \neq 0 \text{ und } \operatorname{Re}(\alpha) > 0 \ll$$

gelöst, sodass unser Integral I_1 die Form:

$$I_1 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-cx} \left(e^{-\frac{(\beta+x)^2}{4\alpha}} + e^{-\frac{(\beta-x)^2}{4\alpha}} \right) dx \quad (7.6a)$$

hat.

Analog kann man das Integral I_2 mit einer Sinustransformation ermitteln:

$$I_2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-cx} \left(e^{-\frac{(\beta-x)^2}{4\alpha}} - e^{-\frac{(\beta+x)^2}{4\alpha}} \right) dx. \quad (7.6b)$$

Damit erhalten wir für die Gleichung F (7.4) nach Ersetzung der Integrale I_1 durch (7.6a) und I_2 durch (7.6b) zusammengefasst:

$$F = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-cx} e^{-\frac{(\beta-x)^2}{4\alpha}} dx. \quad (7.7a)$$

Das Integral \bar{F} ergibt sich analog:

$$\bar{F} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-(c+1)x} e^{-\frac{(\beta-x)^2}{4\alpha}} dx. \quad (7.7b)$$

Aus der Kenntnis von F (7.7a) und \bar{F} (7.7b) können wir nun Rückschlüsse auf unsere Integralgleichungen I (7.3a) und J (7.3b) ziehen. Sie weisen die folgenden Formen auf:

$$I = \frac{rK e^{-r\xi}}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\alpha c^2 + \beta c} \int_0^{+\infty} e^{-cx} e^{-\frac{(\beta-x)^2}{4\alpha}} dx \quad (7.8a)$$

und

$$J = \frac{DS^*(\tau - \xi) e^{-r\xi}}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\alpha c^2 + \beta c} \int_0^{+\infty} e^{-(c+1)x} e^{-\frac{(\beta-x)^2}{4\alpha}} dx. \quad (7.8b)$$

Nun können wir diese mit Hilfe des N -Punkte Gauß-Laguerre Quadraturschemas (C.2):

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx = \sum_{k=1}^N \gamma_k f(x_k) + R_n f$$

approximativ berechnen. Hierbei müssen wir einerseits die Substitution $y := cx$ und andererseits die Substitution $y := (c+1)x$ für unsere Integrale I (7.8a) und J (7.8b)

durchführen. Ihre Approximationen haben dann die Gestalt:

$$I \approx \frac{rK e^{-r\xi} e^{-\alpha c^2 + \beta c}}{2\sqrt{\pi\alpha} c} \sum_{k=1}^N \gamma_k e^{-\frac{(\beta - \frac{y_k}{c})^2}{4\alpha}}, \quad (7.9a)$$

$$J \approx \frac{DS^*(\tau - \xi) e^{-r\xi} e^{-\alpha c^2 + \beta c}}{2\sqrt{\pi\alpha} c + 1} \sum_{k=1}^N \gamma_k e^{-\frac{(\beta - \frac{y_k}{c+1})^2}{4\alpha}}, \quad (7.9b)$$

wobei γ_k die Gewichte und y_k die Stützstellen der *Gauß-Laguerre Quadratur* sind.

Insgesamt haben wir damit eine Integralgleichung für den Preis einer amerikanischen Put-Option bezüglich eines Basiswertes mit kontinuierlicher Dividendenzahlung erhalten, die wir numerisch auswerten können. Sie lautet:

$$P(S, \tau) = p(S, \tau) + \int_0^\tau I(S(\tau), S^*(\tau - \xi), \tau, \xi) - J(S(\tau), S^*(\tau - \xi), \tau, \xi) d\xi, \quad (7.10a)$$

wobei

$$I(S(\tau), S^*(\tau - \xi), \tau, \xi) := \frac{rK e^{-r\xi} e^{-\alpha c^2 + \beta c}}{2\sqrt{\pi\alpha} c} \sum_{k=1}^N \gamma_k e^{-\frac{(\beta - \frac{y_k}{c})^2}{4\alpha}}, \quad (7.10b)$$

$$J(S(\tau), S^*(\tau - \xi), \tau, \xi) := \frac{DS^*(\tau - \xi) e^{-r\xi} e^{-\alpha c^2 + \beta c}}{2\sqrt{\pi\alpha} c + 1} \sum_{k=1}^N \gamma_k e^{-\frac{(\beta - \frac{y_k}{c+1})^2}{4\alpha}}, \quad (7.10c)$$

mit

$$\begin{aligned} \xi &:= \tau - x, & \kappa_2 &:= \frac{2(r - D)}{\sigma^2}, \\ \alpha &:= \frac{\sigma^2}{2} \xi, & \beta' &:= 2c + 1 - \kappa_2, & \beta &:= \alpha\beta' - \ln \left[\frac{S(\tau)}{S^*(\tau - \xi)} \right]. \end{aligned}$$

Für die numerische Berechnung der gefundenen Integralgleichung (7.10a) ist zu beachten, dass der unbekannte freie Rand $S^*(\tau)$ ein Parameter in unserer Gleichung ist und somit als bekannt vorausgesetzt wird. Wir müssen also den freien Rand $S^*(\tau)$ als erstes bestimmen.

Die Integralgleichung für den freien Rand haben wir zu Beginn dieses Kapitels in Gleichung (7.1b) benannt. Diese kann analog zu (7.1a) so umgeformt werden, dass wir die folgende Integralgleichung für den freien Rand $S^*(\tau)$ erhalten:

$$S^*(\tau) = K - p(S^*(\tau), \tau) - \int_0^\tau I(S^*(\tau), S^*(\tau - \xi), \tau, \xi) - J(S^*(\tau), S^*(\tau - \xi), \tau, \xi) d\xi. \quad (7.11)$$

Anhand dieser Gleichung ist erkennbar, dass der freie Rand bei seiner Berechnung selbst benötigt wird. Aus diesem Grund kann er nur rekursiv über das folgende Schema bestimmt werden, welches für jeden Zeitpunkt τ und jeden Basiswertkurs $S^* > 0$ gilt und mit Anzahl der Iterationsschritte exponentiell konvergiert [25, Seite 78].

Für $n = 1, 2, \dots$ gilt:

$$S_n^*(\tau) = K - p(S_{n-1}^*(\tau), \tau) - \int_0^\tau I(S_{n-1}^*(\tau), S_{n-1}^*(\tau - \xi), \tau, \xi) - J(S_{n-1}^*(\tau), S_{n-1}^*(\tau - \xi), \tau, \xi) d\xi,$$

wobei

$$S_0^*(\tau) = K \quad \forall \tau \geq 0.$$

Die Rekursion erfolgt solange bis:

$$\|S_n^*(\tau) - S_{n-1}^*(\tau)\| \leq \epsilon. \quad (\star)$$

Die dort enthaltenen Integrale

$$\int_0^\tau I(S_{n-1}^*(\tau), S_{n-1}^*(\tau - \xi), \tau, \xi) d\xi = \int_0^\tau \frac{rK e^{-r\xi} e^{-\alpha c^2 + \beta c}}{2\sqrt{\pi\alpha} c} \sum_{k=1}^N \gamma_k e^{-\frac{(\beta - \frac{y_k}{c})^2}{4\alpha}} d\xi$$

und

$$\int_0^\tau J(S_{n-1}^*(\tau), S_{n-1}^*(\tau - \xi), \tau, \xi) d\xi = \int_0^\tau \frac{DS^*(\tau - \xi) e^{-r\xi} e^{-\alpha c^2 + \beta c}}{2\sqrt{\pi\alpha} c + 1} \sum_{k=1}^N \gamma_k e^{-\frac{(\beta - \frac{y_k}{c+1})^2}{4\alpha}} d\xi$$

berechnen wir mit Hilfe einer *modifizierten N-Punkte Trapezregel*. Das heißt, die Trapezregel (D.2) wird im ersten Abschnitt durch die Rechteckregel (D.1) ersetzt, da für den unteren Integranden die Integrale $I(S_{n-1}^*(\tau), S_{n-1}^*(\tau - 0), \tau, 0)$ und $J(S_{n-1}^*(\tau), S_{n-1}^*(\tau - 0), \tau, 0)$ nicht existieren. Unsere *modifizierte N-Punkte Trapezregel* für das Integral I lautet:

$$\int_0^\tau I(S_{n-1}^*(\tau), S_{n-1}^*(\tau - \xi), \tau, \xi) \, d\xi \simeq \underbrace{\frac{\tau}{N}}_{=:h} \left(1.5 \cdot I(S_{n-1}^*(\tau), S_{n-1}^*(\tau - h), \tau, h) + \sum_{k=2}^{N-1} I(S_{n-1}^*(\tau), S_{n-1}^*(\tau - kh), \tau, kh) + 0.5 \cdot I(S_{n-1}^*(\tau), S_{n-1}^*(0), \tau, \tau) \right).$$

Analog folgt die *modifizierte N-Punkte Trapezregel* für das Integral J .

Bei der Rekursion ist darauf zu achten, dass die Schrittweite $h = \frac{\tau}{N}$ konstant bleibt. Wir ermitteln also bei der Bestimmung sämtlicher Stützstellen keine neue Schrittweite, um zu verhindern, dass die Intervallzerlegung in Richtung der Null immer feiner wird. Würden wir dies nicht tun, wäre der numerische Aufwand enorm groß.

7.1.2 Numerische Auswertung

Zunächst wollen wir den freien Rand S^* näher betrachten, da dieser für die Optionspreisbestimmung entscheidend ist. Seine Eigenschaften als Funktion der Zeit t sind uns aus dem Kapitel 3.1 bekannt. Da wir hier aber unsere Untersuchungen bezüglich der Restlaufzeit $\tau := T - t$ durchführen, müssen wir diese der veränderten Situation anpassen und erhalten:

- Der freie Rand $S^*(\tau)$ ist als Funktion der Restlaufzeit τ stetig,
- monoton fallend und
- nimmt zum Zeitpunkt $\tau = 0$ gerade sein Maximum an, welches im Fall von $D < r$ dem Ausübungspreis K entspricht.

Wir wollen nun graphisch überprüfen, ob der freie Rand, den unser Programm ermittelt, diesem Verhalten genügt. Hierzu betrachten wir die Situation: $K = 45$, $r = 4.88$ % pro Jahr, $\sigma = 30$ % pro Jahr, $D = 0$ und $T = 0.6$ Jahre. Für unser Programm verwenden wir neben der *64-Punkte Gauß-Laguerre Quadratur* auch die *modifizierte 10-Punkte Trapezregel*. Des Weiteren seien $c = 2$ und das Stoppkriterium der Rekursion $(\star) \epsilon = 0.0001$.

In den beiden folgenden Abbildungen 7.1 und 7.2 stellen wir den zeitlichen Verlauf des freien Randes $S^*(\tau)$ mit unterschiedlichen Zinssätzen r und verschiedenen Volatilitäten σ dar.

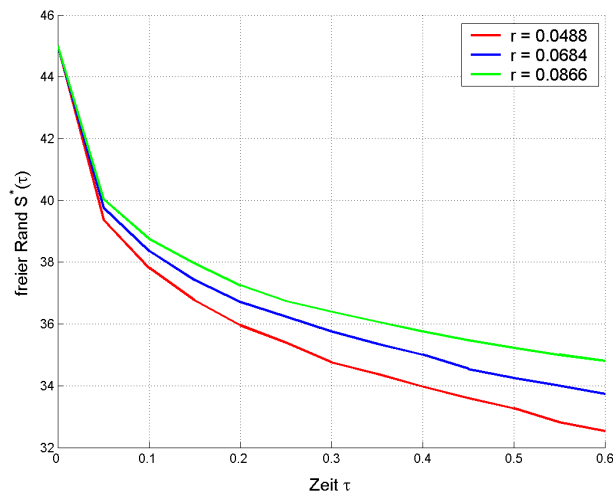


Abbildung 7.1: Der freie Rand $S^*(\tau)$ in Abhängigkeit vom Zinssatz r

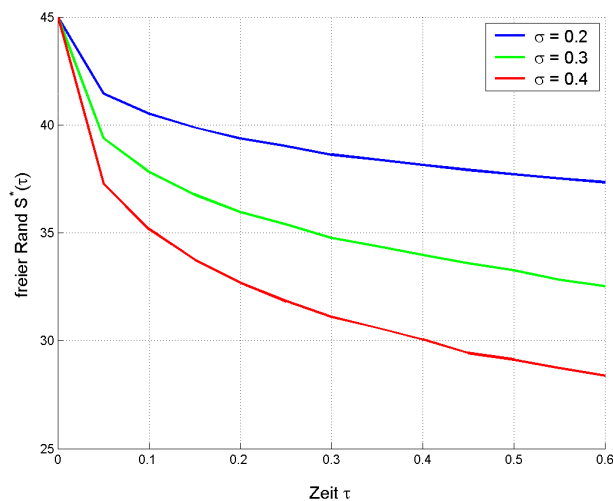


Abbildung 7.2: Der freie Rand $S^*(\tau)$ in Abhängigkeit von der Volatilität σ

Hieraus erkennen wir, dass der freie Rand $S^*(\tau)$ sein Maximum für $\tau = 0$ annimmt und dass es dem Ausübungspreis K entspricht, da für die Dividendenrate $D = 0$ gilt. Weiter können wir folgern, dass für höhere Volatilitäten oder niedrigere Zinssätze der freie Rand $S^*(\tau)$ kleiner wird. Dieses Verhalten lässt sich aus der ersten Glattheitsbedingung (5.22f):

$$S^*(\tau) = K - P(S^*, \tau)$$

zusammen mit den in Abschnitt 1.6 erläuterten Abhängigkeiten des Optionspreises von unterschiedlichen Marktparametern:

$$\begin{aligned} P \uparrow &\Leftrightarrow \sigma \uparrow, \\ P \uparrow &\Leftrightarrow r \downarrow \end{aligned}$$

ableiten.

Damit haben wir gezeigt, dass unser Programm das erwartete qualitative Verhalten des freien Randes $S^*(\tau)$ erzeugt und wollen nun die Genauigkeit unserer Resultate prüfen, indem wir sie mit bekannten Verfahren vergleichen. Diese seien zum einen die Methoden von Balakrishna [1], deren Funktionsweise wir im Abschnitt 3.3.4 erläutert haben, und zum anderen die von Panini [25]. Seine Vorgehensweise entspricht der unseren, da seine Ideen die Grundlage dieser Arbeit sind. Panini verwendet wie wir die *modifizierte 10-Punkte Trapezregel*, die *64-Punkte Gauß-Laguerre Quadratur*, $c = 2$ und als Stoppkriterium $\epsilon = 0.0001$.

Um eine große Vielfalt an Vergleichsmöglichkeiten zu erhalten, führen wir verschiedene Berechnungen durch, in denen wir die Parameter Volatilität σ , den Ausübungspreis K und die Laufzeit T variieren. Der Zinssatz $r = 4.88\%$ pro Jahr sei dagegen konstant. Unsere erhaltenen Ergebnisse haben wir in den Spalten sechs und sieben der nachfolgenden Tabelle 7.1 zusammengestellt, wobei wir hinsichtlich des Stoppkriteriums der Rekursion zwei Möglichkeiten ($\epsilon = 0.0001$ und $\epsilon = 0.00001$) prüfen, um zu entscheiden, welches Kriterium wir später zur Optionspreisbestimmung verwenden. In den ersten drei Spalten sind die variablen Parameter dargestellt, die beiden nachfolgenden Spalten zeigen die Vergleichswerte von Balakrishna und Panini.

Zunächst betrachten wir die Spalten sechs und sieben der Tabelle 7.1, die unsere Ergebnisse bezüglich beider Stoppkriterien enthalten. Wir können feststellen, dass sie für $T = 0.0833$ annähernd identisch sind, jedoch für die längere Laufzeit $T = 0.5833$ leicht voneinander abweichen. Die CPU-Laufzeit der Programmvarianten beträgt für $\epsilon = 0.0001$ 0.55 Sekunden und für $\epsilon = 0.00001$ 0.65 Sekunden. Da diese nicht deutlich voneinander abweichen, ist es gerechtfertigt, das feinere Stoppkriterium ($\epsilon = 0.00001$) zu bevorzugen. Aus diesem Grund werden wir im weiteren Verlauf dieses Abschnitts das Stoppkriterium der Rekursion auf $\epsilon = 0.00001$ festlegen.

Da Balakrishna den freien Rand anders berechnet als Panini und wir, wollen wir diesen als Vergleichsgrundlage ansehen.

σ	K	$T = \tau$	freier Rand $S^*(\tau)$			
			Balakrishna	Panini	Unser Programm	
					$\epsilon = 0.0001$	$\epsilon = 0.00001$
0.2	35	0.0833	31.74	31.73842	31.71567	31.71562
0.2	35	0.5833	29.085	29.07397	29.09052	29.08296
0.2	40	0.0833	36.274	36.27249	36.24648	36.24643
0.2	40	0.5833	33.24	33.2274	33.24631	33.23767
0.2	45	0.0833	40.808	40.80657	40.77724	40.77723
0.2	45	0.5833	37.395	37.38083	37.40209	37.39238
0.3	35	0.0833	29.779	29.78251	29.76016	29.76000
0.3	35	0.5833	25.483	25.4729	25.48835	25.48836
0.3	40	0.0833	34.033	34.03697	34.01153	34.01143
0.3	40	0.5833	29.124	29.11191	29.12955	29.12955
0.3	45	0.0833	38.287	38.29143	38.26297	38.26286
0.3	45	0.5833	32.764	32.75092	32.77074	32.77075
0.4	35	0.0833	27.849	27.84781	27.81122	27.81108
0.4	35	0.5833	22.156	22.14671	22.15946	22.14645
0.4	40	0.0833	31.827	31.82594	31.78425	31.78409
0.4	40	0.5833	25.321	25.31055	25.32509	25.31023
0.4	45	0.0833	35.805	35.80411	35.75720	35.80018
0.4	45	0.5833	28.486	28.47439	28.49077	28.47401

Tabelle 7.1: Freier Rand einer amerikanischen Put-Option mit $r = 0.0488$

Paninis und unsere Ergebnisse weichen leicht voneinander ab: für $T = 0.0833$ liegen Paninis Ergebnisse näher an Balakrishnas, aber für $T = 0.5833$ sind es unsere. Da diese Abweichungen zu Balakrishna insgesamt gering sind, ist die Konsistenz unseres freien Randes gezeigt und wir können uns nun mit dem Optionspreis beschäftigen.

Sein Verhalten bezüglich unterschiedlicher Marktparameter haben wir im Abschnitt 1.6 allgemein erläutert. Dieses wollen wir nun anhand unserer ermittelten Preise für jeden dieser Parameter graphisch überprüfen. Die Graphiken erzeugen wir hinsichtlich der folgenden Situation: $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 5\%$ pro Jahr, $\sigma = 30\%$ pro Jahr, $D = 0$, $T = 1$ Jahr, wobei wir immer genau einen dieser Faktoren verändern werden und die anderen konstant halten. Des Weiteren verwenden wir $c = 2$, die *modifizierte 10-Punkte Trapezregel* und die *64-Punkte Gauß-Laguerre Quadratur*.

Die Abhängigkeit des Optionspreises vom *Kurs des Basiswertes* S_0 zum *Zeitpunkt des Optionskaufs* und vom *Ausübungspreis* K konnten wir direkt aus der Auszahlungsfunktion ableiten. Hierbei haben wir festgestellt, dass der Putpreis steigt, wenn der Kurs des Basiswertes S_0 fällt beziehungsweise der Ausübungspreis K steigt. Dieses Monotonieverhalten lässt sich in den Abbildungen 7.3 und 7.4 wieder erkennen.

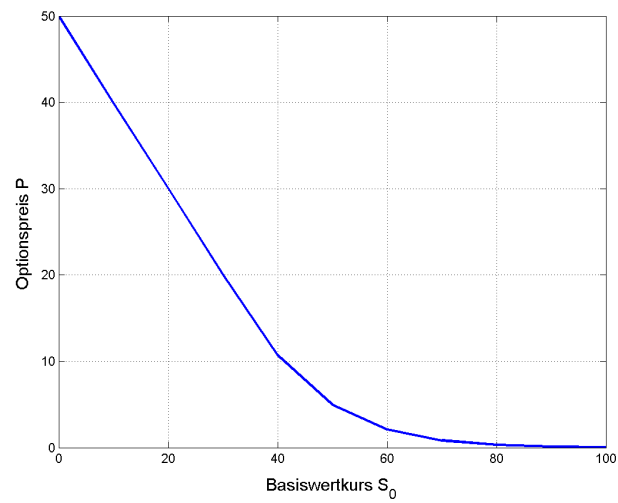


Abbildung 7.3: Der Preis einer amerikanischen Put-Option P in Abhängigkeit von dem Kurs des Basiswertes S_0

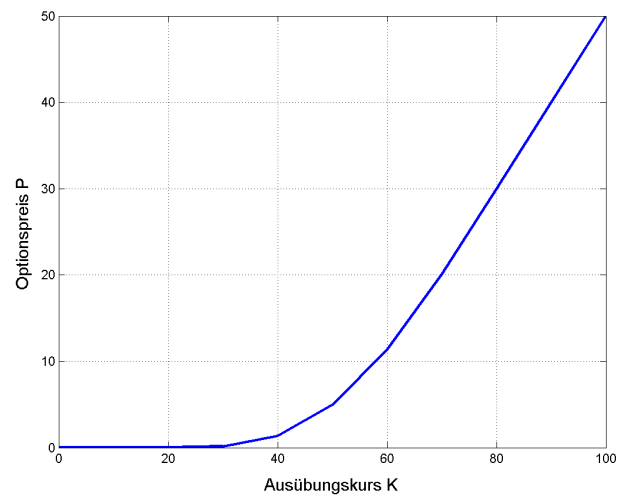


Abbildung 7.4: Der Preis einer amerikanischen Put-Option P in Abhängigkeit von dem Ausübungspreis K

Hinsichtlich der *Laufzeit* T wissen wir, dass sich für amerikanische Optionen mit einem entfernten Verfallszeitpunkt auch mehr Ausübungsmöglichkeiten ergeben. Aus diesem Grund werden amerikanische Optionen wertvoller, wenn sie später enden. Das bedeutet, dass der Optionspreis bezüglich der Laufzeit monoton wachsend ist. Dies wird durch die Abbildung 7.5 verdeutlicht.

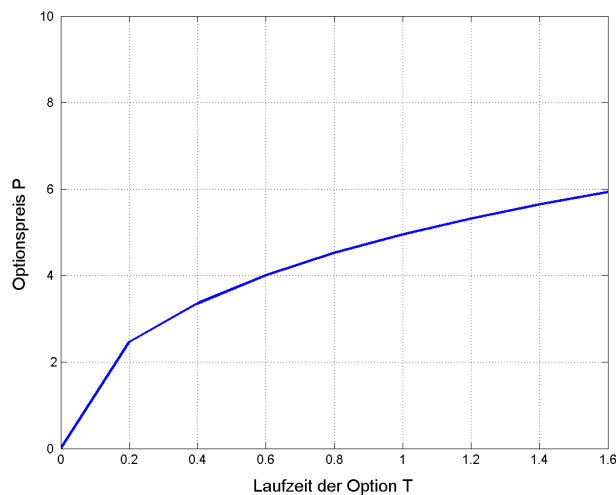


Abbildung 7.5: Der Preis einer amerikanischen Put-Option P in Abhängigkeit von der Laufzeit T

Die nächste Graphik zeigt das Verhalten des Putpreises zur *Volatilität* σ , die ein Maß für die Unsicherheit des Kursverlaufs des Basiswertes darstellt. Mit größerem σ erhöht sich demnach die Möglichkeit, dass der Basiswertkurs fällt, aber auch steigen kann, wobei der Verlust durch den Optionspreis begrenzt ist. Damit entspricht der abgebildete Graph 7.6 der Realität, da dort der Optionspreis mit steigender Volatilität größer wird.

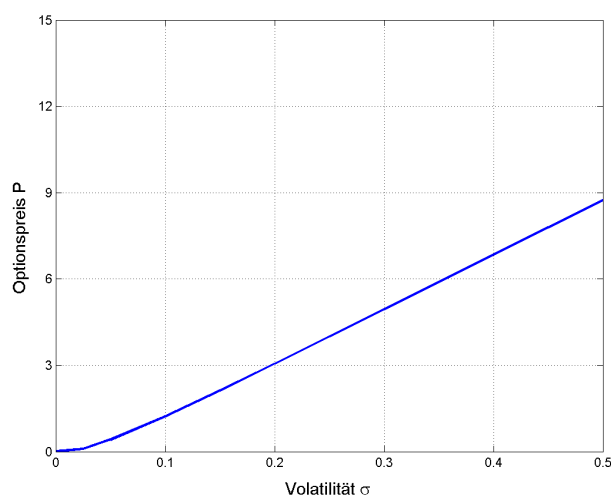


Abbildung 7.6: Der Preis einer amerikanischen Put-Option P in Abhängigkeit von der Volatilität σ

Wir wissen, dass mit einem steigenden Habenzins r auch die Preise des Basiswertes zum Steigen tendieren sowie, dass Dividendenzahlungen die Basiswertkurse aus Arbitragegründen reduzieren. Das Verhalten des Optionspreises bezüglich des Basiswertkurses zum Zeitpunkt des Optionskaufs haben wir bereits in der Abbildung 7.3 dargestellt und können daraus schließen, dass die Abhängigkeit vom Preis P zum Zinssatz r monoton fallend und zur Dividendenrate D monoton wachsend ist. Dies zeigen die Abbildungen 7.7 und 7.8.

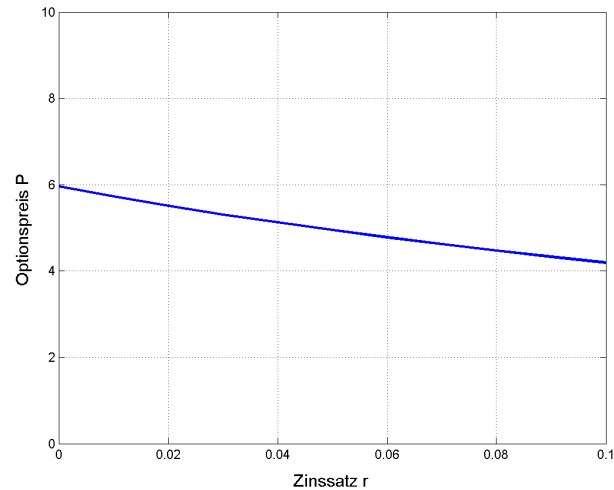


Abbildung 7.7: Der Preis einer amerikanischen Put-Option P in Abhängigkeit von der Zinssatz r

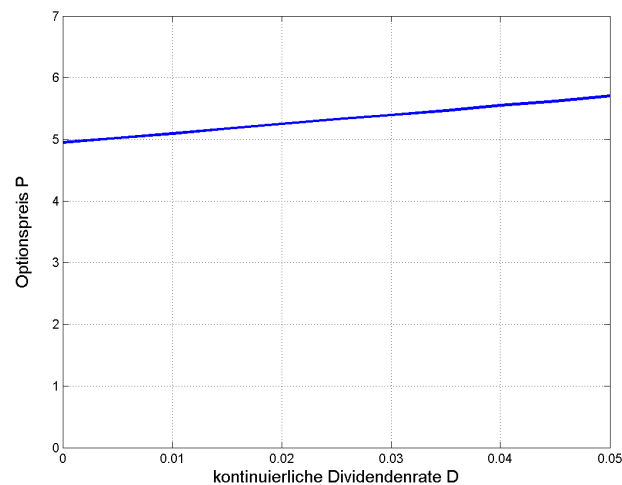


Abbildung 7.8: Der Preis einer amerikanischen Put-Option P in Abhängigkeit von der kontinuierlichen Dividendenrate D

Damit haben wir gezeigt, dass das Verhalten des Optionspreises hinsichtlich der unterschiedlichen Marktparameter unseren Erkenntnissen aus dem Kapitel 1.6 entspricht.

Wie exakt unsere Ergebnisse jedoch sind, konnten wir bisher nicht zeigen. Hierfür stellen wir unsere Resultate in der Tabelle 7.2 den Werten gegenüber, die mit dem Binomialmodell, mit dem Modell von Huang [15] und Balakrishna [1] sowie mit Paninis Modell [25] erzeugt wurden.

σ	K	$T = \tau$	Optionspreis P					
			Binomialmodell	Huang	Balakrishna	Panini	Unser Programm	
							A	B
0.2	35	0.0833	0.0062	0.0062	0.0062	0.0065	0.00623	0.00619
0.2	35	0.3333	0.2004	0.2004		0.2014	0.20161	0.20035
0.2	35	0.5833	0.4328	0.4337	0.4329	0.4346	0.43569	0.43282
0.2	40	0.0833	0.8522	0.8543	0.8522	0.8516	0.85295	0.85177
0.2	40	0.3333	1.5798	1.5873		1.5792	1.58314	1.57957
0.2	40	0.5833	1.9904	1.9987	1.9907	1.9904	1.99627	1.99043
0.2	45	0.0833	5.0000	5.0020	5.0000	5.0305	4.99413	4.99322
0.2	45	0.3333	5.0883	5.0954		5.0846	5.09703	5.08807
0.2	45	0.5833	5.2670	5.2631	5.2671	5.2638	5.27922	5.26685
0.3	35	0.0833	0.0774	0.0775	0.0774	0.0777	0.07762	0.07739
0.3	35	0.3333	0.6975	0.6978		0.6986	0.69980	0.69750
0.3	35	0.5833	1.2198	1.2233	1.2200	1.2216	1.22426	1.21985
0.3	40	0.0833	1.3099	1.3116	1.3100	1.3098	1.31087	1.30978
0.3	40	0.3333	2.4835	2.4919		2.4831	2.48639	2.48242
0.3	40	0.5833	3.1696	3.1842	3.1699	3.1705	3.17602	3.16961
0.3	45	0.0833	5.0597	5.0604	5.0597	5.0578	5.06053	5.05907
0.3	45	0.3333	5.7056	5.6970		5.7051	5.70957	5.70515
0.3	45	0.5833	6.2436	6.2303	6.2439	6.2431	6.25039	6.24334
0.4	35	0.0833	0.2466	0.2467	0.2466	0.2468	0.24699	0.24656
0.4	35	0.3333	1.3460	1.3468		1.3470	1.34892	1.34603
0.4	35	0.5833	2.1549	2.1603	2.1551	2.1568	2.16013	2.15487
0.4	40	0.0833	1.7681	1.7694	1.7682	1.7681	1.76922	1.76807
0.4	40	0.3333	3.3874	3.3970		3.3879	3.39142	3.38732
0.4	40	0.5833	4.3526	4.3699	4.3530	4.3543	4.35943	4.35256
0.4	45	0.0833	5.2868	5.2853	5.2869	5.2860	5.28742	5.28651
0.4	45	0.3333	6.5099	6.5128		6.5095	6.51380	6.50941
0.4	45	0.5833	7.3830	7.3865	7.3833	7.3840	7.39009	7.38265

Tabelle 7.2: Preis einer amerikanischen Put-Option mit $r = 0.0488$ und $S_0 = 40$

Die Tabelle 7.2 beruht auf der Situation, in welcher der Zinssatz $r = 4.88\%$ pro Jahr, der Basiswertkurs $S_0 = 40$ und die kontinuierliche Dividendenrate $D = 0$ konstant sind. Die restlichen Parameter Volatilität σ , Ausübungspreis K und Laufzeit T seien variabel und sind in den ersten drei Spalten der Tabelle dargestellt. Die nachfolgenden Spalten zeigen den Optionspreis für die jeweilige Situation bezüglich der unterschiedlichen Modelle.

Das Binomialmodell in Spalte drei haben wir in Abschnitt 3.3.1 erläutert und wollen es als Vergleichsgrundlage verwenden, da es eine anerkannte Methode ist und bezüglich 10.000 Zeitschritte genaue Ergebnisse liefert.

Huang (Spalte 4) ist uns aus dem Abschnitt 3.3.3 bekannt und seine Werte basieren auf der *4-Punkte-Richardson-Extrapolationsmethode*.

Balakrishnas Preise befinden sich in der fünften Spalte und wurden wegen der höheren Genauigkeit mit den im Abschnitt 3.3.4 erwähnten Korrekturen bestimmt.

Panini (Spalte 6) benutzt für seine Resultate die *100-Punkte Trapezregel*, die *16-Punkte Gauß-Laguerre Quadratur*, $c = 2$ und als Rekursionsabbruch $\epsilon = 0.0001$.

Wir dagegen verwenden als Rekursionsabbruch $\epsilon = 0.00001$, $c = 2$ und unterscheiden zwei Programmaufrufe, die wir mit 'A' (Spalte 7) und 'B' (Spalte 8) bezeichnen. Beide gebrauchen die *64-Punkte Gauß-Laguerre Quadratur*, jedoch unterscheiden sie sich hinsichtlich der *modifizierten Trapezregel*: im Programm 'A' ist $N = 10$ und im Programm 'B' gilt bei der Berechnung des Optionspreis $N = 100$ und beim freien Rand $N = 10$.

Unsere Ergebnisse für 'A' und 'B' haben im Fall $T = 0.0833$ nahezu identische Werte. Für größere Laufzeiten kommt es zu minimalen Abweichungen, deren Größe bei maximal 0.01 liegt. Ihre CPU-Laufzeiten weisen jedoch große Unterschiede auf: 'A' benötigt 7.13 Sekunden, 'B' dagegen bereits 86.49 Sekunden, sodass bei der Wahl der Programme darauf zu achten ist, wie genau die benötigten Werte sein sollen.

Im Vergleich zum Binomialmodell weist unsere Variante 'B' gegenüber den anderen Vergleichswerten die besten Ergebnisse auf. Sie stimmen bis auf wenige Ausnahmen sogar bis zur vierten Nachkommastelle überein. Da unser Programm gegenüber der Binomialmethode eine geringere Laufzeit vorweisen kann, sollte man für solche Berechnungen unser Verfahren vorziehen.

Balakrishnas Ergebnisse weichen nur geringfügig vom Binomialmodell ab, wohingegen die Unterschiede bei den beiden anderen Verfahren für größere Volatilitäten bei Huang zu- beziehungsweise bei Panini abnehmen. Doch auch ihre Werte zeigen keine großen Abweichungen.

Nun wollen wir aber auch Beispiele betrachten, in denen kontinuierliche Dividenden gezahlt werden. Sie stammen aus dem Manuskript von Wan [33] und beruhen auf folgender Situation: $T = 1$ Jahr, $r = 10$ % pro Jahr, $S = 100$, $\sigma = 20$ % pro Jahr, $D = 5$ % pro Jahr und K variabel. Wir wählen für die Konstante $c = 3$ und für das Stoppkriterium (\star) $\epsilon = 0.0001$. Des Weiteren benutzen wir den Programmaufruf 'B' aus der Tabelle 7.2, der die *64-Punkte Gauß-Laguerre Quadratur* und für die *modifizierten Trapezregeln* bei der Berechnung des Optionspreises $N = 100$ und beim freien Rand $N = 10$ verwendet. Die damit erhaltenen Werte sind in der Tabelle 7.3 Spalte drei dargestellt. Sie werden mit dem Binomialmodell für 100 Zeitschritte (Spalte 2) verglichen.

Die in dieser Tabelle aufgeführten Werte lassen erkennen, dass unsere Ergebnisse für $K \leq 100$ nur gering von der Binomialmethode abweichen, für höhere K werden die Unterschiede jedoch größer.

K	Binomialbaum (100 Schritte)	Unser Programm
60	0.0107	0.0111
70	0.1250	0.1255
80	0.6959	0.6970
90	2.3953	2.4045
100	5.9359	6.0074
110	11.7766	12.0514
120	20.0496	20.6657
130	30.0000	30.5893
140	40.0000	40.4066

Tabelle 7.3: Preis einer amerikanischen Put-Option mit $r = 0.1$, $\sigma = 0.2$ und $S_0 = 100$

Würden wir das Stoppkriterium verfeinern, also $\epsilon = 0.00001$ wählen, so erhalten wir für $K = 140$ einen Preis P in Höhe von 40.3200, der näher an dem bezüglich des Binomialmodells ermittelten Wert liegt. Allerdings erhöht sich die CPU-Laufzeit von 132.25 Sekunden bei $\epsilon = 0.0001$ auf 864.30 Sekunden, sodass wir uns mit der Genauigkeit, die wir mit $\epsilon = 0.0001$ erreichen können, zufrieden geben.

Die vorhandenen Abweichungen können unter anderem darauf zurückgeführt werden, dass die Binomialmethode nicht wie in der Tabelle 7.2 10.000 Zeitschritte verwendet, sondern nur 100. Aus diesem Grund weist sie eine geringere Genauigkeit auf, was wir an einem Beispiel aus der oberen Tabelle 7.2 belegen wollen:

$$\begin{aligned} \text{für } N = 100 & \quad \Rightarrow \quad P = 1.2239, \\ \text{für } N = 10.000 & \quad \Rightarrow \quad P = 1.2198. \end{aligned}$$

Man erkennt hier die Unterschiede, die sich durch die Anzahl der Zeitschritte ergeben.

Insgesamt können wir sagen, dass unser Programm für die Preisbestimmung einer amerikanischen Put-Option mit kontinuierlicher Dividendenzahlung zufriedenstellende bis hervorragende Ergebnisse liefert.

7.2 Die europäische Put-Basket-Option auf zwei Basiswerte

Der Preis einer europäischen Put-Basket-Option bezüglich zweier Basiswerte mit kontinuierlicher Dividendenzahlung ist durch die Integralgleichung (6.7) gegeben:

$$p(S_1, S_2, t) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} \int_{c_2 - i\infty}^{c_2 + i\infty} S_1^{-\omega_1} S_2^{-\omega_2} \hat{\theta}(\omega_1, \omega_2) e^{Q(\omega_1, \omega_2)(T-t)} d\omega_1 d\omega_2, \quad (7.12)$$

wobei die Koeffizienten wie folgt definiert sind:

$$Q(\omega_1, \omega_2) = \frac{\sigma_1^2}{2}\omega_1^2 + \rho\sigma_1\sigma_2\omega_1\omega_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}\omega_2^2 \\ - (r - D_1 - \frac{\sigma_1^2}{2})\omega_1 - (r - D_2 - \frac{\sigma_2^2}{2})\omega_2 - r$$

und

$$\hat{\theta}(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\omega_2} - \frac{1}{\omega_2+1}\right) \left(\frac{K}{N}\right)^{\omega_1+\omega_2+1} \left(\sum_{k=1}^{N-1} (N-k)^{\omega_2+1} k^{\omega_1-1}\right) & \text{(1. Variante)} \\ K^{\omega_1+\omega_2+1} \frac{\Gamma(\omega_1)\Gamma(\omega_2)}{\Gamma(\omega_1+\omega_2+2)} & \text{(2. Variante).} \end{cases}$$

7.2.1 Vorbetrachtung

Wir formen nun diese Preisgleichung hinsichtlich beider Darstellungsvarianten so um, dass eine numerische Berechnung möglich ist.

Vorbetrachtungen bezüglich der ersten Darstellungsvariante von $\hat{\theta}$

Zunächst führen wir die folgenden Notationen ein:

$$\begin{aligned} \alpha &:= \frac{\sigma_1^2}{2}(T-t), & \beta &:= \rho\sigma_1\sigma_2(T-t), & \gamma &:= \frac{\sigma_2^2}{2}(T-t), \\ \delta &:= -\left(r - D_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)(T-t), & \delta' &:= \delta - \ln S_1, \\ \epsilon &:= -\left(r - D_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t), & \epsilon' &:= \epsilon - \ln S_2, \\ \mathbf{A} &:= \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma \end{pmatrix}, & \mathbf{b} &:= \begin{pmatrix} \delta' \\ \epsilon' \end{pmatrix}, \\ \mathbf{c} &:= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, & \mathbf{w} &:= \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

um eine kompaktere Schreibweise der Preisgleichung (7.12) mit der ersten Darstellungsvariante von $\hat{\theta}$ zu erhalten. Sie hat nun die folgende Form:

$$p(S_1, S_2, t) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 e^{-r(T-t)} \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty} \hat{\theta}(\mathbf{w}) e^{\mathbf{w}^\top \mathbf{A} \mathbf{w}} e^{\mathbf{b}^\top \mathbf{w}} d\mathbf{w}$$

und mit Hilfe der Definition von $\mathbf{w} := \mathbf{c} + i\mathbf{x}$ lassen sich die komplexen Integrationsgrenzen in reelle Integrationsgrenzen umwandeln. Nach Anwendung diverser Rechenregeln von Matrizen können wir die obige Gleichung wie folgt schreiben:

$$p(S_1, S_2, t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{(2\pi)^2} e^{\mathbf{c}^\top \mathbf{A} \mathbf{c} + \mathbf{b}^\top \mathbf{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\theta}(\mathbf{c} + i\mathbf{x}) e^{-\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}} e^{i\mathbf{d}^\top \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad (7.13)$$

wobei $\mathbf{d} = 2\mathbf{A}\mathbf{c} + \mathbf{b}$.

Diese Preisgleichung soll nun vereinfacht werden, indem wir die Matrix \mathbf{A} diagonalisieren. Hierfür benötigen wir eine Orthogonalmatrix \mathbf{O} zur Matrix \mathbf{A} , die im zweidimensionalen Fall noch über die Eigenvektoren explizit ermittelt werden kann. Die gesuchte Orthogonalmatrix ist:

$$\mathbf{O} := \begin{pmatrix} \frac{-\beta}{\sqrt{h_1 - h_2}} & \frac{-\beta}{\sqrt{h_1 + h_2}} \\ \frac{\alpha - \gamma - h}{\sqrt{h_1 - h_2}} & \frac{\alpha - \gamma + h}{\sqrt{h_1 + h_2}} \end{pmatrix}, \quad (7.14)$$

wobei $h := \sqrt{(\alpha - \gamma)^2 + \beta^2}$, $h_1 := 2h^2$ und $h_2 := 2(\alpha - \gamma)h$.

Die gesuchte Diagonalmatrix zu \mathbf{A} ergibt sich aus der Matrizenmultiplikation von $\mathbf{O}^\top \mathbf{A} \mathbf{O}$:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha + \gamma + h}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha + \gamma - h}{2} \end{pmatrix}, \quad (7.15)$$

wobei die Diagonalelemente gerade die Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} sind.

Wenden wir nun die Transformation $\mathbf{x} := \mathbf{O}\mathbf{y}$ auf unsere Preisgleichung (7.13) an, so erhalten wir:

$$p(S_1, S_2, t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{(2\pi)^2} e^{\mathbf{c}^\top \mathbf{A} \mathbf{c} + \mathbf{b}^\top \mathbf{c}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\theta}(\mathbf{c} + i\mathbf{O}\mathbf{y}) e^{-\mathbf{y}^\top \mathbf{D} \mathbf{y}} e^{i\vartheta \mathbf{y}} \underbrace{\det(\mathbf{O})}_{=1} d\mathbf{y}}_{=: I}, \quad (7.16)$$

wobei $\vartheta := \mathbf{d}^\top \mathbf{O}$. Der Faktor $\hat{\theta}(\mathbf{c} + i\mathbf{O}\mathbf{y})$ ist eine komplexe Zahl und kann deshalb in einen Realteil und einen Imaginärteil aufgespalten werden:

$$\hat{\theta}(\mathbf{c} + i\mathbf{O}\mathbf{y}) = \underbrace{\operatorname{Re}(\hat{\theta}(\mathbf{c} + i\mathbf{O}\mathbf{y}))}_{=: \Re(\mathbf{y})} + i \underbrace{\operatorname{Im}(\hat{\theta}(\mathbf{c} + i\mathbf{O}\mathbf{y}))}_{=: \Im(\mathbf{y})},$$

sodass wir das Integral aus (7.16) analog zum Kapitel 7.1 mit Hilfe der Euler-Formel vereinfachen können:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [\Re(\mathbf{y}) \cos(\vartheta \mathbf{y}) - \Im(\mathbf{y}) \sin(\vartheta \mathbf{y})] e^{-\mathbf{y}^\top \mathbf{D} \mathbf{y}} d\mathbf{y} \\ + i \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [\Re(\mathbf{y}) \sin(\vartheta \mathbf{y}) + \Im(\mathbf{y}) \cos(\vartheta \mathbf{y})] e^{-\mathbf{y}^\top \mathbf{D} \mathbf{y}} d\mathbf{y}}_{=0}, \quad (7.17)$$

wobei der Imaginärteil wieder verschwindet.

Die Quadratur des Integrals I (7.17) ist schwierig und soll deshalb wieder approximativ ermittelt werden. Hierfür wollen wir das *zweidimensionale N -Punkte Gauß-Hermite Quadraturschema* anwenden. Es hat analog zum eindimensionalen Fall (C.6) die folgende Gestalt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathbf{x}^\top \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \gamma_k \gamma_l f(x_k, x_l). \quad (7.18)$$

Bevor wir das Schema jedoch anwenden können, müssen wir das Integral (7.17) auf die gewünschte Form bringen. Dies können wir mit Hilfe der Variablentransformation $\mathbf{y} := \mathbf{G} \mathbf{u}$ erreichen, wobei $\mathbf{G}^2 := \mathbf{D}^{-1}$. Damit lässt sich das Integral I (7.17) wie folgt schreiben:

$$I = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{D})}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{[\Re(\mathbf{G} \mathbf{u}) \cos(\vartheta \mathbf{G} \mathbf{u}) - \Im(\mathbf{G} \mathbf{u}) \sin(\vartheta \mathbf{G} \mathbf{u})]}_{=: \phi(\mathbf{u})} e^{-\mathbf{u}^\top \mathbf{u}} d\mathbf{u}$$

und wir können es nun mit Hilfe des *zweidimensionalen N -Punkte Gauß-Hermite Quadraturschemas* (7.18) approximieren:

$$I \approx \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \gamma_k \gamma_l \phi(u_k, u_l), \quad (7.19)$$

wobei γ_k, γ_l die Gewichte und u_k, u_l die Stützstellen der *Gauß-Hermite Quadratur* (C.6) darstellen.

Insgesamt haben wir somit für die *erste Darstellungsvariante von $\hat{\theta}(\omega_1, \omega_2)$* eine Gleichung für den *Preis einer europäischen Put-Basket-Option bezüglich zweier Basiswerte mit kontinuierlicher Dividendenzahlung* erhalten. Sie lautet:

$$p(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, t) = \frac{e^{-r(T-t)} e^{\mathbf{c}^\top \mathbf{A} \mathbf{c} + \mathbf{b}^\top \mathbf{c}}}{(2\pi)^2 \sqrt{\det(\mathbf{D})}} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \gamma_k \gamma_l \phi(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_l), \quad (7.20a)$$

mit

$$\phi(\mathbf{u}) = \Re(\mathbf{G} \mathbf{u}) \cos(\vartheta \mathbf{G} \mathbf{u}) - \Im(\mathbf{G} \mathbf{u}) \sin(\vartheta \mathbf{G} \mathbf{u}). \quad (7.20b)$$

Vorbetrachtungen bezüglich der zweiten Darstellungsvariante von $\hat{\theta}$

Wir beginnen analog zur ersten Darstellungsvariante und führen für eine kompaktere Schreibweise der Preisformel folgende Notationen ein:

$$\begin{aligned} \alpha &:= \frac{\sigma_1^2}{2}(T-t), & \beta &:= \rho\sigma_1\sigma_2(T-t), & \gamma &:= \frac{\sigma_2^2}{2}(T-t), \\ \delta &:= -\left(r - D_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)(T-t), & \delta' &:= \delta - \ln S_1, \\ \epsilon &:= -\left(r - D_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t), & \epsilon' &:= \epsilon - \ln S_2, \\ \mathbf{w} &:= \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, & g(\mathbf{w}) &:= \frac{\Gamma(\omega_1)\Gamma(\omega_2)}{\Gamma(\omega_1 + \omega_2 + 2)}, \\ \mathbf{A} &:= \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma \end{pmatrix}, & \mathbf{b} &:= \begin{pmatrix} \delta' + \ln K \\ \epsilon' + \ln K \end{pmatrix}, & \mathbf{c} &:= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der eingeführten Notationen und der Definition von $\mathbf{w} := \mathbf{c} + i\mathbf{x}$ erhalten wir analog zum vorherigen Abschnitt aus der Preisgleichung (7.12):

$$p(S_1, S_2, t) = \frac{Ke^{-r(T-t)}}{(2\pi)^2} e^{\mathbf{c}^\top \mathbf{A} \mathbf{c} + \mathbf{b}^\top \mathbf{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathbf{x}) e^{-\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}} e^{i\mathbf{d}^\top \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad (7.21)$$

wobei

$$g(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(c_1 + ix_1)\Gamma(c_2 + ix_2)}{\Gamma(c_1 + c_2 + 2 + ix_1 + ix_2)},$$

$$\mathbf{d} = 2\mathbf{A}\mathbf{c} + \mathbf{b}.$$

Um diese Preisgleichung zu vereinfachen, wenden wir die gleiche Variablentransformation wie bei der ersten Darstellungsvariante $\mathbf{x} := \mathbf{O}\mathbf{y}$ auf unsere Preisgleichung (7.21) an und erhalten:

$$p(S_1, S_2, t) = \frac{Ke^{-r(T-t)}}{(2\pi)^2} e^{\mathbf{c}^\top \mathbf{A} \mathbf{c} + \mathbf{b}^\top \mathbf{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathbf{O}\mathbf{y}) e^{-\mathbf{y}^\top \mathbf{D} \mathbf{y}} e^{i\vartheta \mathbf{y}} \underbrace{\det(\mathbf{O})}_{=1} dy, \quad (7.22)$$

wobei \mathbf{D} die Diagonalmatrix zu \mathbf{A} (7.15), \mathbf{O} die Orthogonalmatrix zu \mathbf{A} (7.14) und $\vartheta := \mathbf{d}^\top \mathbf{O}$ sind.

Wie $\hat{\theta}(\mathbf{c} + i\mathbf{O}\mathbf{y})$ in der Vorbetrachtung bezüglich der ersten Darstellungsvariante, so ist auch $g(\mathbf{O}\mathbf{y})$ eine komplexe Zahl und hat deshalb die folgende Form:

$$g(\mathbf{O}\mathbf{y}) = \underbrace{\operatorname{Re}(g(\mathbf{O}\mathbf{y}))}_{=: \Re(\mathbf{y})} + i \underbrace{\operatorname{Im}(g(\mathbf{O}\mathbf{y}))}_{=: \Im(\mathbf{y})}.$$

Das Integral aus der Preisgleichung (7.22) kann nun wieder mit Hilfe der Euler-Formel vereinfacht werden und unter Beachtung, dass der Imaginärteil gerade den Wert Null annimmt, erhalten wir:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [\Re(\mathbf{y}) \cos(\vartheta \mathbf{y}) - \Im(\mathbf{y}) \sin(\vartheta \mathbf{y})] e^{-\mathbf{y}^\top \mathbf{D} \mathbf{y}} d\mathbf{y}. \quad (7.23)$$

Dieses Integral I können wir analog zu (7.17) mittels der *zweidimensionalen N -Punkte Gauß-Hermite Quadratur* (7.18) approximieren. Zuvor muss die folgende Variablentransformation $\mathbf{y} := \mathbf{G} \mathbf{u}$ durchgeführt werden, wobei $\mathbf{G}^2 := \mathbf{D}^{-1}$. Die Quadraturformel für I ist dann:

$$I \approx \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \gamma_k \gamma_l \phi(u_k, u_l), \quad (7.24)$$

mit

$$\phi(u) = \Re(\mathbf{G} \mathbf{u}) \cos(\vartheta \mathbf{G} \mathbf{u}) - \Im(\mathbf{G} \mathbf{u}) \sin(\vartheta \mathbf{G} \mathbf{u}).$$

Die Koeffizienten γ_k, γ_l stellen die Gewichte und u_k, u_l die Stützstellen der *Gauß-Hermite Quadratur* (C.6) dar.

Insgesamt haben wir somit für die *zweite Darstellungsvariante von $\hat{\theta}(\omega_1, \omega_2)$* eine Gleichung für den *Preis einer europäischen Put-Basket-Option bezüglich zweier Basiswerte mit kontinuierlicher Dividendenzahlung* erhalten. Sie lautet:

$$p(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, t) = \frac{K e^{-r(T-t)} e^{\mathbf{c}^\top \mathbf{A} \mathbf{c} + \mathbf{b}^\top \mathbf{c}}}{(2\pi)^2 \sqrt{\det(\mathbf{D})}} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \gamma_k \gamma_l \phi(u_k, u_l), \quad (7.25a)$$

mit

$$\phi(u) = \Re(\mathbf{G} \mathbf{u}) \cos(\vartheta \mathbf{G} \mathbf{u}) - \Im(\mathbf{G} \mathbf{u}) \sin(\vartheta \mathbf{G} \mathbf{u}). \quad (7.25b)$$

7.2.2 Numerische Auswertung

Wir werden nun unsere Vorbetrachtungen hinsichtlich der beiden Darstellungsvarianten in zwei Programmen numerisch umsetzen.

Das Programm bezüglich der ersten Darstellungsvariante, welches wir mit *Programm Trapez* bezeichnen wollen, benötigt die 32-Punkte-Trapezregel.

Mit *Programm Gamma* benennen wir das Programm bezüglich der zweiten Darstellungsvariante. Es benötigt eine Gammafunktion, die als Eingabeparameter komplexe Zahlen erlaubt. Eine solche Gammafunktion kann man im Internet unter den MATLAB-Routinen für die numerische Berechnung von speziellen Funktionen (http://ceta.mit.edu/comp_spec_func) finden.

Die Preisbestimmung erfolgt in beiden Darstellungsvarianten mit Hilfe des *N-Punkte Gauß-Hermite Quadraturschemas*.

Zunächst wollen wir herausfinden, wie viele Quadraturpunkte N wir benötigen, damit unsere Ergebnisse eine gute Genauigkeit aufweisen. Hierfür ermitteln wir in der folgenden Situation: $S_1 = S_2 = 100$ zum Zeitpunkt $t = 0$, $K = 200$, $r = 9.5\%$ pro Jahr, $\sigma_1 = \sigma_2 = 20\%$ pro Jahr, $\rho = 0.5$, $D_1 = D_2 = 0$ und $T = 0.5$ Jahre den Preis bezüglich unterschiedlicher Quadraturpunkte und fassen unsere Resultate in der Tabelle 7.4 zusammen, wobei wir sie den Werten von Panini [25, Tabelle 8.3, Seite 81] gegenüberstellen. Er verwendet wie wir die Mellin-Transformation mit $c_1 = c_2 = 3$ und berechnet den Parameter $\hat{\theta}$ über die Gammafunktion. Als Vergleichsgrundlage dient die Monte-Carlo Simulation, deren Funktionsweise wir im Abschnitt 3.3.5 kennengelernt haben. Ihr Ergebnis wurde mit 10^6 Simulationen ermittelt und ist in der letzten Zeile der Tabelle 7.4 dargestellt.

In der ersten Spalte befindet sich die Anzahl der Quadraturpunkte, die für die Bestimmung der Preise, welche in den drei folgenden Spalten abgebildet sind, benötigt wurden und in den beiden letzten Spalten geben wir die dazugehörige Programmlaufzeit an.

Anzahl der Quadraturpunkte	Preis			CPU-Zeit in Sekunden	
	Panini	Programm Trapez	Programm Gamma	Programm Trapez	Programm Gamma
32	5.5163	5.5347	5.5270	0.30	0.88
64	5.6007	5.6113	5.6117	0.75	3.14
128	5.6006	5.6116	5.6116	2.73	12.19
MonteC - 10^6	5.5928				

Tabelle 7.4: Preis einer europäischen Put-Basket-Option mit $S_1 = S_2 = 100$ zur Zeit $t = 0$, $K = 200$, $r = 0.095$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.2$, $\rho = 0.5$ und $T = 0.5$ Jahre

Mittels der Tabelle 7.4 können wir feststellen, dass die Programme *Trapez* und *Gamma* ähnliche Preise liefern, die für 128 Quadraturpunkte sogar übereinstimmen. Da die Laufzeiten beider Programme aber erkennen lassen, dass das *Programm Gamma* wesentlich aufwendiger ist, sollten wir die Berechnung nach der *ersten Darstellungsvariante* bevorzugen.

Des Weiteren fällt auf, dass sich die Ergebnisse bezüglich der Quadraturpunkte $N = 64$ und $N = 128$ kaum noch verändern, wobei dagegen die Laufzeit auf ihr Vierfaches ansteigt. Deshalb könnten wir uns auf das 64-Punkte Quadraturschema beschränken. Doch bevor wir eine endgültige Entscheidung treffen, wollen wir noch andere Situationen hinsichtlich beider Wahlen von Quadraturpunkte überprüfen.

Ein Vergleich mit der Monte-Carlo Simulation zeigt, dass Paninis und unsere Resultate für $N = 64$ nur gering von deren ermittelten Preis abweichen, wobei Panini noch näher als wir an diesem liegt. Allerdings hat die Monte-Carlo Simulation mit 47.08 Sekunden eine viel höhere CPU-Laufzeit als Panini, der nur maximal 1.71 Sekunden benötigt. Diese Laufzeiten wurden jedoch auf einer SPARCstation-4 Maschine mit einem 110 MHz

Mikro SPARC-II Prozessor bestimmt und sind deshalb nicht mit unseren vergleichbar. Eine Angabe zur Programmiersprache machte Panini weder in [24] noch in seiner Dissertation [25].

Da wir die gleichen Ideen wie Panini verwenden und mit dem *Programm Gamma* eine ähnliche numerische Umsetzung haben, kann man folgern, dass auch unsere Laufzeiten wesentlich unter der der Monte-Carlo Simulation liegen.

Aus diesem Grund sollten zur Berechnung des europäischen Put-Basket-Preises die Methode von Panini sowie unsere Methoden der Monte-Carlo Simulation vorgezogen werden.

Als nächstes wollen wir die Genauigkeit unserer Preise bezüglich unterschiedlicher Volatilitäten und Korrelationen ermitteln und untersuchen deshalb die folgende Situation: $S_1 = S_2 = 10$ zum Zeitpunkt $t = 0$, $K = 20$, $r = 3\%$ pro Jahr, $\sigma_1 = 40\%$ pro Jahr, $D_1 = D_2 = 0$ und $T = 1$ Jahr, in der wir den Wert der zweiten Volatilität σ_2 so verändern, dass der Abstand zur ersten größer wird. Die Korrelation sei dabei einmal positiv und einmal negativ.

Die erhaltenen Resultate vergleichen wir in der Tabelle 7.5 mit der zweidimensionalen Binomialmethode und Panini, wobei wir die Vergleichswerte der Dissertation von Panini [25, Tabelle 8.4, Seite 82] entnommen haben. Er verwendet die *128-Punkte Gauß-Hermite Quadratur*, wobei wir dagegen die Preise jeweils für $N = 64$ und $N = 128$ berechnen. Des Weiteren sei $c_1 = c_2 = 3$.

σ_2	ρ	2D-Binomialbaum	Panini	Programm Trapez		Programm Gamma	
			N=128	N=64	N=128	N=64	N=128
0.3	0.5	2.1006	2.0998	2.0997	2.0998	2.0997	2.0998
0.3	-0.5	1.1984	1.1980	1.1980	1.1980	1.1980	1.1980
0.2	0.5	1.7831	1.7822	1.7733	1.7819	1.7733	1.7819
0.2	-0.5	1.0830	1.0825	1.0818	1.0825	1.0818	1.0825
0.1	0.5	1.4958	1.4935	1.3426	1.4574	1.3426	1.4574
0.1	-0.5	1.1080	1.1040	1.0258	1.0927	1.0258	1.0927

Tabelle 7.5: Preis einer europäischen Put-Basket-Option mit $S_1 = S_2 = 10$ zur Zeit $t = 0$, $K = 20$, $r = 0.03$, $\sigma_1 = 0.4$ und $T = 1$ Jahr

In der Tabelle 7.5 stimmen die Ergebnisse unserer Programme vollkommen überein, jedoch ist auffällig, dass mit größer werdender Differenz zwischen den Volatilitäten, unsere Ergebnisse bezüglich der Quadraturpunktanzahl $N = 64$ und $N = 128$ mehr voneinander abweichen.

Im Vergleich zur Binomialmethode und Panini genügt für $\sigma_2 = 0.3$ die 64-Punkte Quadratur, wohingegen für kleinere Volatilitäten $\sigma_2 = 0.2$ und $\sigma_2 = 0.1$ unsere Resultate erst für $N = 128$ gute Näherungen zeigen.

Insgesamt können wir aus der Tabelle schließen, dass wir für eine gute Genauigkeit bei unterschiedlichen Volatilitäten mit einer Differenz von 0.2 das 128-Punkte Quadraturschema verwenden sollten.

Jetzt wollen wir den Verlauf des Optionspreises wie bei den amerikanischen Put-Optionen in Bezug auf seine Einflußfaktoren graphisch überprüfen. Hierbei erzeugen wir Graphiken für die Situation: $S_1 = S_2 = 50$ zum Zeitpunkt $t = 0$, $K = 100$, $r = 5\%$ pro Jahr, $\sigma_1 = \sigma_2 = 20\%$ pro Jahr, $\rho = 0.5$, $D_1 = D_2 = 0$ und $T = 1$ Jahr, in der wir immer genau einen Marktparameter verändern werden. Die Laufzeit wollen wir dabei unberührt lassen, weil sie im europäischen Fall eine untergeordnete Rolle spielt.

Zur Erzeugung der Graphiken verwenden wir unser *Programm Trapez*, da dieses weniger Rechenzeit benötigt. Des Weiteren können wir aufgrund der bisherigen Erkenntnisse das *64-Punkte Gauß-Hermite Quadraturschema* benutzen, wobei wir bezüglich der Volatilität eine Ausnahme machen müssen. Hier benötigen wir die *128-Punkte Gauß-Hermite Quadratur*, damit die Ergebnisse eine gute Genauigkeit aufweisen. Weiter sei $c_1 = c_2 = 3$.

Die Abhängigkeit des Preises der Put-Basket-Option von den *Basiswertkursen* S_1 und S_2 zum Zeitpunkt $t = 0$ wollen wir in einer dreidimensionalen Graphik darstellen, in der die Achsen gerade den Verlauf der Basiswertkurse S_1 und S_2 sowie den dazugehörigen Optionspreis p abbilden.

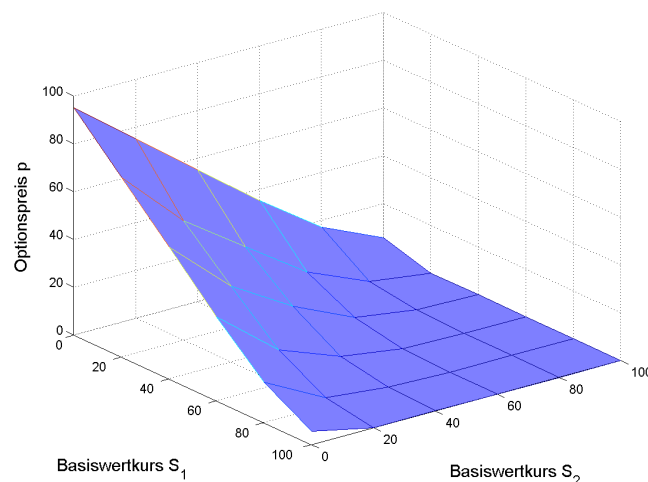


Abbildung 7.9: Der Preis einer europäischen Put-Basket-Option p in Abhängigkeit von den Basiswerten S_1 und S_2 zur Zeit $t = 0$

Die Abbildung 7.9 zeigt eine monoton fallende Fläche, deren Maximum für die Basiswerte $S_1 = S_2 = 0$ angenommen wird. Es entspricht dem abgezinste Ausübungspreis Ke^{-rT} . Für steigende Basiswertkurse fällt der dazugehörige Optionspreis zunächst linear, bevor er sich dann der Null konvex annähert.

Hält man einen der beiden Basiswerte S_1 oder S_2 fest, so ergibt sich eine zweidimensionale Graphik, die wir in ähnlicher Form bei den amerikanischen Put-Optionen erhalten haben (Abbildung 7.3): Sie zeigt eine monoton fallende Funktion der Dimension eins bezüglich einem steigenden Basiswertkurs.

Das beschriebene Verhalten lässt sich wieder mit Hilfe des inneren Wertes der Option erklären. Dieser ergibt sich nämlich zum Laufzeitende aus der Differenz des Ausübungspreises K und der Summe der Basiswertkurse $S_1 + S_2$ und ist im Falle der Ausübung echt positiv:

$$p(S_1, S_2, T) = K - S_1(T) - S_2(T) > 0. \quad (7.26)$$

Hieraus ist zu erkennen, dass der Optionspreis fallen muss, sobald ein Basiswertkurs ansteigt. Dies wird durch unsere Abbildung 7.9 verdeutlicht.

Aus der Gleichung (7.26) können wir auch sofort das Verhalten des Optionspreises zum *Ausübungspreis* K folgern. Es muss gelten, dass mit steigendem Ausübungspreis K auch der Optionspreis steigt. Dieses wird in der Abbildung 7.10 gezeigt, deren Achsen den Ausübungspreis K und den Optionspreis p zeigen.

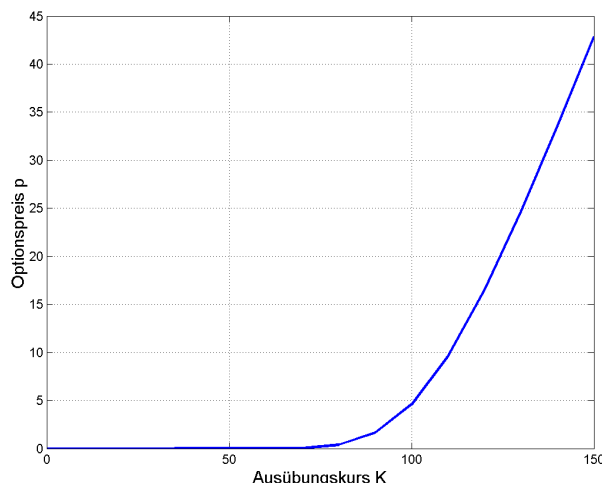


Abbildung 7.10: Der Preis einer europäischen Put-Basket-Option p in Abhängigkeit von dem Ausübungspreis K

Die *Volatilität* ist ein Maß für die Unsicherheit der Bewegung des Basiswertkurses. Optionsbesitzer profitieren von einer steigenden Volatilität, da ein für den Optionsbesitzer ungünstiger Kursverlauf durch den Verlust des Optionspreises begrenzt ist. Dies führt dazu, dass mit steigenden Volatilitäten σ_1 und σ_2 auch der europäische Put-Basket-Optionspreis steigen muss. Diese Schlussfolgerung wird in der Abbildung 7.11 illustriert, wobei $\sigma_1 = \sigma_2$.

Der vorletzte Faktor, der untersucht werden soll, ist der *risikolose Zinssatz* r . In der Abbildung 7.12 ist zu sehen, dass mit steigendem Zins der Preis der europäischen Put-Basket-Option fällt. Die Ursache liegt darin, dass mit steigendem Zins auch der Preis des Basiswertes zum Steigen tendiert, was nach der Abbildung 7.9 zu einem fallenden Optionspreis führt.

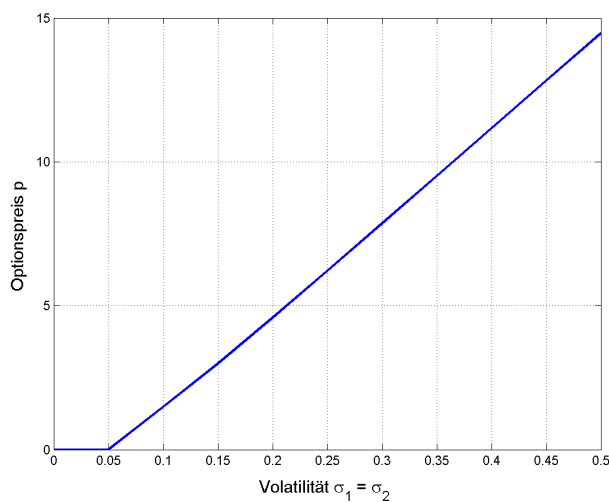


Abbildung 7.11: Der Preis einer europäischen Put-Basket-Option p in Abhängigkeit von den Volatilitäten σ_1 und σ_2

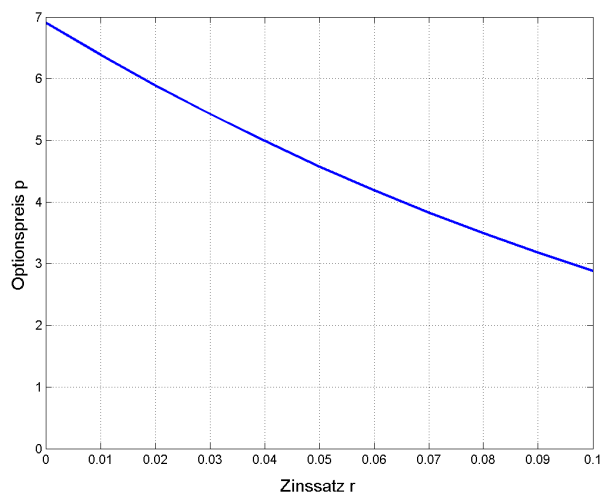


Abbildung 7.12: Der Preis einer europäischen Put-Basket-Option p in Abhängigkeit von dem Zinssatz r

Zum Abschluss betrachten wir den Einfluss von *Dividendenzahlungen mit Rate D* . Wir wissen bereits, dass der Preis einer Put-Option mit kontinuierlicher Dividendenzahlung höher als der Preis einer Put-Option ohne Dividendenzahlung ist. Der Grund dafür ist, dass bei kontinuierlicher Dividendenzahlung der Kurs des Basiswertes fällt und somit ist es für Inhaber der Put-Option lukrativer, bei festem Ausübungspreis zu verkaufen. Der Wert der Put-Option steigt also mit Höhe der Dividendenzahlungen.

Diese Abhängigkeit gilt auch für Put-Basket-Optionen und ist in der Abbildung 7.13 dargestellt. Wir haben hier die beiden Dividendenraten D_1 und D_2 variiert, wobei $D_1 = D_2$ ist.

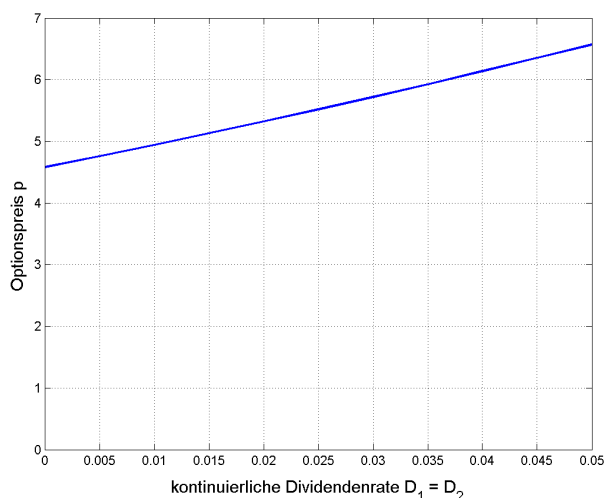


Abbildung 7.13: Der Preis einer europäischen Put-Basket-Option p in Abhängigkeit von den Dividenden D_1 und D_2

Nun wollen wir die Genauigkeit unserer Optionspreise auch noch bezüglich Dividendenzahlungen prüfen und betrachten dazu die folgende Situation: $S_1 = S_2 = 50$ zum Zeitpunkt $t = 0$, K variabel, $r = 5\%$ pro Jahr, $D_1 = D_2 = 5\%$ pro Jahr und $T = 1$ Jahr. Wir erzeugen zwei Tabellen, die sich in den Volatilitäten und der Korrelation wie folgt unterscheiden: in der Tabelle 7.6 seien $\sigma_1 = \sigma_2 = 20\%$ pro Jahr und $\rho = 0.5$ und in der Tabelle 7.7 nehmen wir an: $\sigma_1 = 20\%$ pro Jahr, $\sigma_2 = 90\%$ pro Jahr und $\rho = -0.9$. Unsere Ergebnisse, die bezüglich beider Programme sowie für $N = 64$ und $N = 128$ ermittelt wurden, vergleichen wir in diesen Tabellen mit der Monte-Carlo Simulation, deren Werte für 10^4 Simulationen erzeugt wurden, und der zweidimensionalen 100-Stufen Binomialmethode. Die verwendeten Vergleichswerte stammen aus dem Manuskript von Wan [33].

K	MC Simulation (10^4)	2D- Binomial- baum	Unser Programm			
			Trapez		Gamma	
			64	128	64	128
60	0.0046	0.0057	0.0059	0.0059	0.0059	0.0059
70	0.1013	0.0992	0.0999	0.0999	0.0999	0.0999
80	0.7036	0.6878	0.6880	0.6880	0.6880	0.6880
90	2.6360	2.6026	2.5999	2.5999	2.5999	2.5999
100	6.6120	6.5741	6.5701	6.5701	6.5701	6.5701
110	12.7038	12.6702	12.6685	12.6686	12.6685	12.6686
120	20.4008	20.3822	20.3833	20.3838	20.3832	20.3838
130	29.0641	29.0673	29.0673	29.0698	29.0664	29.0698
140	38.2295	38.2400	38.2317	38.2424	38.2272	38.2424

Tabelle 7.6: Preis einer europäischen Put-Basket-Option mit $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.2$ und $\rho = 0.5$

Anhand der Vergleichswerte lässt sich feststellen, dass unsere Ergebnisse in der Tabelle 7.6 für beide Programme identisch sind und dass erst ab einem Ausübungspreis von $K = 110$ minimale Abweichungen zwischen den Werten der beiden Wahlen der Quadraturpunkte entstehen.

Unsere Preise kommen denen der zweidimensionalen Binomialmethode näher als die Monte-Carlo Simulation.

Für eine gute Genauigkeit können wir uns in dem Fall, dass $\sigma_1 = \sigma_2$ ist, sogar mit der *64-Punkte Gauß-Hermite Quadratur* zufrieden geben.

K	MC Simulation (10^4)	2D- Binomial- baum	Unser Programm			
			Trapez		Gamma	
			64	128	64	128
60	0.0006	0.0009	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
70	0.2477	0.2357	0.0381	0.2017	0.0392	0.2022
80	2.5301	2.5221	2.2607	2.4774	2.2616	2.4782
90	7.4317	7.4228	7.0963	7.3752	7.0978	7.3703
100	13.7443	13.7223	13.3378	13.6619	13.3313	13.6614
110	20.8755	20.8355	20.3882	20.7564	20.3790	20.7679
120	28.5504	28.4969	27.9664	28.4063	27.9737	28.4225
130	36.5927	36.5500	35.9480	36.4620	35.9582	36.4675
140	44.9115	44.8900	44.2458	44.8182	44.2301	44.8005

Tabelle 7.7: Preis einer europäischen Put-Basket-Option mit $\sigma_1 = 0.2 \neq \sigma_2 = 0.9$ und $\rho = -0.9$

Anders verhält es sich aber, wenn die Volatilitäten stark voneinander abweichen, wie es in der Tabelle 7.7 der Fall ist. Hier genügt die *64-Punkte Gauß-Hermite Quadratur* nicht mehr, sondern wir benötigen die *128-Punkte Gauß-Hermite Quadratur*.

Die Ergebnisse unserer beiden Programme unterscheiden sich nur unwesentlich, doch diese Werte stimmen nicht mehr so gut wie in der Tabelle 7.6 mit dem zweidimensionalen Binomialmodell überein. Die Ursache ist in den weit voneinander abweichenden Volatilitäten zu finden, was wir bereits in der Tabelle 7.5 festgestellt haben.

Wir mussten in der Tabelle 7.7 im Fall von $K = 60$ sogar feststellen, dass unser Programm einen negativen Preis liefert, anstatt den Wert Null auszugeben. Aus diesem Grund benötigen wir in unseren Programmen noch eine Abfrage, ob der Preis negativ ist. Sollte dies der Fall sein, setzen wir ihn auf Null.

Wir müssen also anmerken, dass unsere Programme an Genauigkeit verlieren, wenn die Volatilitäten stark voneinander abweichen.

Zusammenfassend lässt sich aber sagen, dass unsere Programme bereits für das *64-Punkte Gauß-Hermite Quadraturschema* eine gute Genauigkeit der Preise liefern, wenn die Volatilitäten nah beieinander liegen.

7.3 Die europäische Put-Basket-Option auf n Basiswerte

Der Preis einer europäischen Put-Basket-Option auf einer beliebigen Anzahl von Basiswerten mit kontinuierlicher Dividendenzahlung ist durch die Integralgleichung (6.24) gegeben:

$$p(S_1, \dots, S_n, t) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} \dots \int_{c_n - i\infty}^{c_n + i\infty} S_1^{-\omega_1} \dots S_n^{-\omega_n} \cdot \hat{\theta}(\omega_1, \dots, \omega_n) e^{Q(\omega_1, \dots, \omega_n)(T-t)} d\omega_1 \dots d\omega_n, \quad (7.27)$$

wobei die Koeffizienten die folgende Gestalt haben:

$$Q(\omega_1, \dots, \omega_n) = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \rho_{kl} \sigma_k \sigma_l \omega_k \omega_l - \sum_{k=1}^n \left(r - D_k - \frac{\sigma_k^2}{2} \right) \omega_k - r,$$

und

$$\hat{\theta}(\omega_1, \dots, \omega_n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\omega_n} - \frac{1}{\omega_n + 1} \right) \left(\frac{K}{N} \right)^{1 + \sum_{k=1}^n \omega_k} \prod_{l=1}^{n-2} \left(\frac{1}{N} \right)^{1 + \omega_n + \sum_{m=1}^l \omega_{n-m}} \\ \cdot \prod_{l=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{N-1} (N-k)^{1 + \sum_{m=1}^l \omega_{n+1-m}} k^{\omega_{n-l-1}} \right) & (1. \text{ Var.}) \\ K^{\sum_{k=1}^n \omega_k + 1} \frac{\prod_{k=1}^n \Gamma(\omega_k)}{\Gamma(\sum_{k=1}^n \omega_k + 2)} & (2. \text{ Var.}). \end{cases}$$

7.3.1 Vorbetrachtung

Bevor wir diese Integralgleichung jedoch numerisch umsetzen können, müssen wir wie im vorherigen Abschnitt 7.2, der sich auf europäische Put-Basket-Optionen bezüglich zwei Basiswerte bezog, analoge Umformungen hinsichtlich beider Darstellungsvarianten vornehmen. Diese werden nun auf die Dimension n erweitert.

Vorbetrachtungen bezüglich der ersten Darstellungsvariante von $\hat{\theta}$

Zu Beginn führen wir wieder für eine kompaktere Schreibweise der Preisformel die folgenden Notationen ein:

$$\forall k, l \in 1, \dots, n: \quad \beta_{k,l} := \frac{1}{2} \rho_{k,l} \sigma_k \sigma_l (T-t), \quad \delta_k := - \left(r - D_k - \frac{\sigma_k^2}{2} \right) (T-t),$$

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \cdots & \beta_{1,n-1} & \beta_{1,n} \\ \beta_{1,2} & \beta_{2,2} & \cdots & \beta_{2,n-1} & \beta_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta_{1,n-1} & \beta_{2,n-1} & \cdots & \beta_{n-1,n-1} & \beta_{n-1,n} \\ \beta_{1,n} & \beta_{2,n} & \cdots & \beta_{n-1,n} & \beta_{n,n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} \delta_1 - \ln S_1 \\ \vdots \\ \delta_n - \ln S_n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{c} := \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} := \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$$

und unter Berücksichtigung dieser Größen erhalten wir mit Hilfe der Definition von $\mathbf{w} := \mathbf{c} + i\mathbf{x}$ eine Integralgleichung aus (7.27), deren Integrationsgrenzen reell sind:

$$p(S_1, \dots, S_n, t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{(2\pi)^n} e^{\mathbf{c}^\top \mathbf{A} \mathbf{c} + \mathbf{b}^\top \mathbf{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\theta}(\mathbf{c} + i\mathbf{x}) e^{-\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}} e^{i\mathbf{d}^\top \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad (7.28)$$

wobei $\mathbf{d} = 2\mathbf{A}\mathbf{c} + \mathbf{b}$.

Nun wollen wir die gefundene Preisgleichung (7.28) vereinfachen, wofür wir wie im Kapitel 7.2 zunächst eine Orthogonalmatrix \mathbf{O} finden müssen, die die Matrix \mathbf{A} diagonalisiert. Eine solche Matrix wird mit Hilfe der Eigenwerte und den dazugehörigen Eigenvektoren bestimmt. Da dies aber für höhere Dimensionen zu komplex wird, überlassen wir diese Aufgabe einem mathematischen Programm wie zum Beispiel der Routine $[\mathbf{O}, \mathbf{D}] = \text{eig}(\mathbf{A})$ aus *MATLAB*.

Die Orthogonalmatrix \mathbf{O} hat also folgende allgemeine Gestalt:

$$\mathbf{O} := \left(\frac{\bar{\mathbf{v}}_1}{\|\bar{\mathbf{v}}_1\|} \quad \dots \quad \frac{\bar{\mathbf{v}}_n}{\|\bar{\mathbf{v}}_n\|} \right), \quad (7.29)$$

wobei $\bar{\mathbf{v}}_k$ der orthonormale Eigenvektor zum k -ten Eigenwert λ_k ist. Die Matrizenmultiplikation von $\mathbf{O}^\top \mathbf{A} \mathbf{O}$ liefert dann die folgende Diagonalmatrix:

$$\mathbf{D} := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (7.30)$$

Wendet man die Transformation $\mathbf{x} := \mathbf{O}\mathbf{y}$ auf unsere Preisgleichung (7.28) an, so ergibt sich:

$$p(S_1, \dots, S_n, t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{(2\pi)^n} e^{\mathbf{c}^\top \mathbf{A} \mathbf{c} + \mathbf{b}^\top \mathbf{c}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\theta}(\mathbf{c} + i\mathbf{O}\mathbf{y}) e^{-\mathbf{y}^\top \mathbf{D} \mathbf{y}} e^{i\vartheta^\top \mathbf{y}} \underbrace{\det(\mathbf{O})}_{=1} dy}_{=: I}, \quad (7.31)$$

wobei $\vartheta := \mathbf{d}^\top \mathbf{O}$.

Aus dem Kapitel 7.2 wissen wir bereits, dass der Term $\hat{\theta}(\mathbf{c} + i\mathbf{O}\mathbf{y})$ eine komplexe Zahl ist und sich deshalb in einen Realteil $\Re(\mathbf{y}) := \text{Re}(\hat{\theta}(\mathbf{c} + i\mathbf{O}\mathbf{y}))$ und einen Imaginärteil $\Im(\mathbf{y}) := \text{Im}(\hat{\theta}(\mathbf{c} + i\mathbf{O}\mathbf{y}))$ aufspalten lässt, sodass das Integral I wieder mit der Euler-

Formel vereinfacht werden kann:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} [\Re(\mathbf{y}) \cos(\vartheta \mathbf{y}) - \Im(\mathbf{y}) \sin(\vartheta \mathbf{y})] e^{-\mathbf{y}^\top \mathbf{D} \mathbf{y}} d\mathbf{y} \\ + i \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} [\Re(\mathbf{y}) \sin(\vartheta \mathbf{y}) + \Im(\mathbf{y}) \cos(\vartheta \mathbf{y})] e^{-\mathbf{y}^\top \mathbf{D} \mathbf{y}} d\mathbf{y}}_{=0},$$

wobei der Imaginärteil gerade Null wird.

Um dieses Integral approximativ über die *n-dimensionale N-Punkte Gauß-Hermite Quadratur* zu berechnen, welche analog zu der zweidimensionalen Form (7.18) die folgende Gestalt hat:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}) e^{-\mathbf{x}^\top \mathbf{x}} d\mathbf{x} \approx \sum_{k_1=1}^N \cdots \sum_{k_n=1}^N \gamma_{k_1} \cdots \gamma_{k_n} f(x_{k_1}, \dots, x_{k_n}), \quad (7.32)$$

müssen wir den Term $e^{-\mathbf{y}^\top \mathbf{D} \mathbf{y}}$ entsprechend umformen. Dies erreichen wir mit der Variablentransformation $\mathbf{y} := \mathbf{G} \mathbf{u}$, wobei $\mathbf{G}^2 := \mathbf{D}^{-1}$. Damit können wir das Integral I wie folgt approximieren:

$$I \approx \sum_{k_1=1}^N \cdots \sum_{k_n=1}^N \gamma_{k_1} \cdots \gamma_{k_n} \underbrace{(\Re(\mathbf{G} \mathbf{u}) \cos(\vartheta \mathbf{G} \mathbf{u}) - \Im(\mathbf{G} \mathbf{u}) \sin(\vartheta \mathbf{G} \mathbf{u}))}_{=: \phi(u_{k_1}, \dots, u_{k_n})}, \quad (7.33)$$

wobei γ_{k_l} die Gewichte und u_{k_l} die Stützstellen der *Gauß-Hermite Quadratur* darstellen.

Insgesamt haben wir somit für die *erste Darstellungsvariante von $\hat{\theta}(\omega_1, \dots, \omega_n)$* eine Gleichung für den *Preis einer europäischen Put-Basket-Option bezüglich n Basiswerte mit kontinuierlicher Dividendenzahlung* erhalten. Sie lautet:

$$p(S_1, \dots, S_n, t) = \frac{e^{-r(T-t)} e^{\mathbf{c}^\top \mathbf{A} \mathbf{c} + \mathbf{b}^\top \mathbf{c}}}{(2\pi)^n \sqrt{\det(\mathbf{D})}} \sum_{k_1=1}^N \cdots \sum_{k_n=1}^N \gamma_{k_1} \cdots \gamma_{k_n} \phi(u_{k_1}, \dots, u_{k_n}), \quad (7.34a)$$

mit

$$\phi(u) = \Re(\mathbf{G} \mathbf{u}) \cos(\vartheta \mathbf{G} \mathbf{u}) - \Im(\mathbf{G} \mathbf{u}) \sin(\vartheta \mathbf{G} \mathbf{u}). \quad (7.34b)$$

Vorbetrachtungen bezüglich der zweiten Darstellungsvariante von $\hat{\theta}$

Wir beginnen wie bei der ersten Darstellungsvariante und führen für eine kompaktere Schreibweise der Preisformel folgende Notationen ein:

$$\forall k, l \in 1, \dots, n : \quad \beta_{k,l} := \rho_{k,l} \sigma_k \sigma_l (T - t), \quad \delta_k := - \left(r - D_k - \frac{\sigma_k^2}{2} \right) (T - t),$$

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \cdots & \beta_{1,n-1} & \beta_{1,n} \\ \beta_{1,2} & \beta_{2,2} & \cdots & \beta_{2,n-1} & \beta_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta_{1,n-1} & \beta_{2,n-1} & \cdots & \beta_{n-1,n-1} & \beta_{n-1,n} \\ \beta_{1,n} & \beta_{2,n} & \cdots & \beta_{n-1,n} & \beta_{n,n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} \delta_1 - \ln S_1 + \ln K \\ \vdots \\ \delta_n - \ln S_n + \ln K \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{c} := \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} := \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}, \quad g(\mathbf{w}) := \frac{\prod_{k=1}^n \Gamma(\omega_k)}{\Gamma(\sum_{k=1}^n \omega_k + 2)}.$$

Unter Anwendung dieser und der Definition von $\mathbf{w} := \mathbf{c} + i\mathbf{x}$ erhalten wir aus der Preisgleichung (7.27):

$$p(S_1, \dots, S_n, t) = \frac{K e^{-r(T-t)}}{(2\pi)^n} e^{\mathbf{c}^\top \mathbf{A} \mathbf{c} + \mathbf{b}^\top \mathbf{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathbf{x}) e^{-\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}} e^{i \mathbf{d}^\top \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad (7.35)$$

wobei

$$g(\mathbf{x}) = \frac{\prod_{k=1}^n \Gamma(c_k + i x_k)}{\Gamma(\sum_{k=1}^n c_k + 2 + i \sum_{k=1}^n x_k)},$$

$$\mathbf{d} = 2\mathbf{A} \mathbf{c} + \mathbf{b}.$$

Die Gleichung (7.35) kann nun analog zu (7.28) vereinfacht werden und wir erhalten mit der Variablentransformation $\mathbf{x} := \mathbf{O} \mathbf{y}$:

$$p(S_1, \dots, S_n, t) = \frac{K e^{-r(T-t)}}{(2\pi)^n} e^{\mathbf{c}^\top \mathbf{A} \mathbf{c} + \mathbf{b}^\top \mathbf{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathbf{O} \mathbf{y}) e^{-\mathbf{y}^\top \mathbf{D} \mathbf{y}} e^{i \vartheta \mathbf{y}} \underbrace{\det(\mathbf{O})}_{=1} dy, \quad (7.36)$$

wobei \mathbf{D} die Diagonalmatrix zu \mathbf{A} (7.30), \mathbf{O} die Orthogonalmatrix zu \mathbf{A} (7.29) und $\vartheta := \mathbf{d}^\top \mathbf{O}$ sind.

Diese Gleichung zeigt einen ähnlichen Integranden wie (7.31), nur dass hier der Term $\hat{\theta}$ durch den Term g ersetzt wurde, der ebenfalls eine komplexe Zahl ist und in einen Realteil $\Re(\mathbf{y}) := \text{Re}(g(\mathbf{O}\mathbf{y}))$ und einen Imaginärteil $\Im(\mathbf{y}) := \text{Im}(g(\mathbf{O}\mathbf{y}))$ aufgespalten werden kann. Aus diesem Grund können wir das Integral aus (7.36) mit der Euler-Formel vereinfachen und nach der Variablentransformation $\mathbf{y} := \mathbf{G}\mathbf{u}$ mit $\mathbf{G}^2 := \mathbf{D}^{-1}$ approximativ über das *n-dimensionale Gauß-Hermite Quadraturschema* (7.32) berechnen. Hierbei ergibt sich die Quadratur für I :

$$I \approx \sum_{k_1=1}^N \cdots \sum_{k_n=1}^N \gamma_{k_1} \cdots \gamma_{k_n} \underbrace{(\Re(\mathbf{G}\mathbf{u}) \cos(\vartheta \mathbf{G}\mathbf{u}) - \Im(\mathbf{G}\mathbf{u}) \sin(\vartheta \mathbf{G}\mathbf{u}))}_{=: \phi(u_{k_1}, \dots, u_{k_n})}, \quad (7.37)$$

wobei γ_{k_l} die Gewichte und u_{k_l} die Stützstellen der *Gauß-Hermite Quadratur* darstellen.

Insgesamt haben wir somit für die *zweite Darstellungsvariante von $\hat{\theta}(\omega_1, \dots, \omega_n)$* eine Gleichung für den *Preis einer europäischen Put-Basket-Option bezüglich n Basiswerte mit kontinuierlicher Dividendenzahlung* erhalten. Sie lautet:

$$p(\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_n, t) = \frac{K e^{-r(T-t)} e^{\mathbf{c}^\top \mathbf{A} \mathbf{c} + \mathbf{b}^\top \mathbf{c}}}{(2\pi)^n \sqrt{\det(\mathbf{D})}} \sum_{k_1=1}^N \cdots \sum_{k_n=1}^N \gamma_{k_1} \cdots \gamma_{k_n} \phi(\mathbf{u}_{k_1}, \dots, \mathbf{u}_{k_n}), \quad (7.38a)$$

mit

$$\phi(\mathbf{u}) = \Re(\mathbf{G}\mathbf{u}) \cos(\vartheta \mathbf{G}\mathbf{u}) - \Im(\mathbf{G}\mathbf{u}) \sin(\vartheta \mathbf{G}\mathbf{u}). \quad (7.38b)$$

7.3.2 Numerische Auswertung

Wir werden nun die beiden Gleichungen (7.34) und (7.38) aus den Vorbetrachtungen für drei Basiswerte numerisch umsetzen, wobei eine Erweiterung auf eine größere Zahl an Basiswerten ohne Probleme möglich ist.

Die Programme hinsichtlich der beiden Darstellungsvarianten bezeichnen wir wieder mit *Programm Trapez* und *Programm Gamma*, wobei die erste die 32-Punkte Trapezregel und die zweite die Gammafunktion mit komplexen Eingabeparametern benötigt, die wir bereits für den zweidimensionalen Fall verwendet haben. Des Weiteren benutzen beide Darstellungsvarianten zur Preisbestimmung das *N-Punkte Gauß-Hermite Quadraturschema*, welches wir für unsere Untersuchungen bezüglich $N = 64$ und $N = 128$ anwenden werden, da wir aus dem vorherigen Abschnitt wissen, dass die Programme für diese Quadraturpunkte eine Lösung mit guter Genauigkeit liefern.

Im Folgenden betrachten wir die Situation: $S_1 = S_2 = S_3 = 33.33$ zum Zeitpunkt $t = 0$, K variabel, $r = 5\%$ pro Jahr, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 20\%$ pro Jahr, $\rho_{1,2} = \rho_{1,3} = \rho_{2,3} = 0.5$, $D_1 = D_2 = D_3 = 5\%$ und $T = 1$ Jahr, um anhand der beiden Programme *Trapez* und *Gamma* die jeweiligen Preise der europäischen Put-Basket-Option zu ermitteln.

Diese fassen wir in der nachfolgenden Tabelle 7.8 zusammen und vergleichen sie mit der Monte-Carlo Simulation, deren Werte für 10^4 Simulationen ermittelt wurden, und der dreidimensionalen 100-Stufen Binomialmethode. Beide Verfahren sind uns in ihrer Funktionsweise aus dem dritten Kapitel bekannt und ihre Ergebnisse hinsichtlich der zu betrachtenden Situation haben wir dem Manuskript von Wan [33] entnommen.

K	MC Simulation (10^4)	3D- Binomial- baum	Unserer Programm			
			Trapez		Gamma	
			64	128	64	128
60	0.0028	0.0026	0.0029	0.0029	0.0029	0.0029
70	0.0697	0.0648	0.0667	0.0667	0.0667	0.0667
80	0.5470	0.5479	0.5494	0.5494	0.5494	0.5494
90	2.2884	2.3129	2.3095	2.3098	2.3095	2.3098
100	6.1516	6.2026	6.1957	6.1997	6.1956	6.1997
110	12.3179	12.3352	12.3096	12.3402	12.3099	12.3402
120	20.1567	20.1504	20.0050	20.1633	20.0108	20.1633

Tabelle 7.8: Preis einer europäischen Put-Basket-Option mit $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.2$ und $\rho_{k,l} = 0.5$ ($k \neq l$)

Mittels der Tabelle 7.8 können wir wieder feststellen, dass die Ergebnisse aus dem *Programm Trapez* und dem *Programm Gamma* fast übereinstimmen. Der Unterschied zwischen beiden Programmen liegt in der Laufzeit. Während das *Programm Trapez* eine CPU-Laufzeit von 59.61 Sekunden bei 64 Quadraturpunkten und von 480.70 Sekunden bei 128 Quadraturpunkten aufweist, ist die CPU-Laufzeit bei dem *Programm Gamma* wesentlich größer. Sie liegt bei 238.23 beziehungsweise bei $2.14 \cdot 10^3$ Sekunden. Aus diesem Grund betrachten wir im weiteren Verlauf dieses Abschnitts nur noch das *Programm Trapez*.

Aus den Zahlenwerten ist ersichtlich, dass mit höherem Ausübungspreis K die Genauigkeit bei der 64-Punkte Gauß-Hermite Quadratur im Vergleich zu den anderen Methoden abnimmt. Wir erhalten allerdings mit der 128-Punkte Gauß-Hermite Quadratur Ergebnisse, die eine sehr gute Genauigkeit aufzeigen. Sie liegen häufig sogar näher an der Binomialmethode als die Monte-Carlo Simulation.

Jetzt wollen wir unserer *Programm Trapez* noch bezüglich unterschiedlicher Volatilitäten prüfen, obwohl wir bereits aus dem zweidimensionalen Fall wissen, dass unsere Ergebnisse nicht mehr so genau sein werden. Demnach verwenden wir die 128-Punkte Gauss-Hermite Quadratur zur Preisermittlung und betrachten die gleiche Situation wie eben, nur dass wir unsere Volatilitäten durch $\sigma_1 = 20\%$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 90\%$ und die Korrelation durch $\rho_{1,2} = \rho_{1,3} = \rho_{2,3} = 0.9$ ersetzen.

Die in dieser Situation mit unserem *Programm Trapez* erhaltenen Ergebnisse haben wir in der Tabelle 7.9 zusammengefasst und vergleichen sie wieder mit der Monte-Carlo Simulation und der dreidimensionalen Binomialmethode.

K	MC Simulation (10^4)	3D- Binomial- baum	Unser Programm Trapez 128
60	4.5300	4.4997	4.2998
70	8.0748	8.0491	7.7521
80	12.5505	12.5334	11.9769
90	17.8477	17.8144	17.1424
100	23.7914	23.7603	23.0113
110	30.2704	30.2553	28.5781
120	37.2008	37.2113	31.4840

Tabelle 7.9: Preis einer europäischen Put-Basket-Option mit $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0.9$ und $\rho_{k,l} = 0.9$ ($k \neq l$)

Wir können erkennen, dass die Monte-Carlo Simulation und die Binomialmethode in ihren Werten nah beieinander liegen, wohingegen unsere Ergebnisse kleiner sind. Für $K \leq 100$ sind diese Unterschiede minimal und belaufen sich nur auf die erste Nachkommastelle, jedoch werden sie für höhere Ausübungspreise K größer.

Für eine bessere Genauigkeit bei der Preisbestimmung haben wir Erweiterungen hinsichtlich der Trapezregel und der Quadraturpunkte vorgenommen, konnten jedoch keine Verbesserungen feststellen. Auch ein Verzicht auf die Verwendung der Euler-Formel und der daraus resultierenden Berücksichtigung von e^{ix} änderte unsere Ergebnisse nicht.

Zusammenfassend können wir sagen, dass unsere Preise für ähnliche Volatilitäten, wie es in der Tabelle 7.8 der Fall war, im Vergleich zu anderen bekannten Verfahren sehr gut sind. Für weit voneinander abweichende Volatilitäten werden dagegen die Preisunterschiede mit steigendem Ausübungspreis K immer größer und deshalb sollte man hier $K \leq 100$ wählen.

Das Verhalten des Optionspreises bezüglich seiner Einflußfaktoren werden wir hier nicht mehr im Einzelnen betrachten, da sich der Verlauf zum zweidimensionalen Fall nicht verändert.

7.4 Die amerikanische Put-Basket-Option auf zwei Basiswerte

Der Preis einer amerikanischen Put-Basket-Option bezüglich zweier Basiswerte mit kontinuierlicher Dividendenzahlung ist durch die Integralgleichung (6.13) gegeben:

$$P(S_1, S_2, t) = p(S_1, S_2, t) - \int_t^T \left(\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty} S_1^{-\omega_1} S_2^{-\omega_2} \cdot \hat{f}(\omega_1, \omega_2, x) e^{Q(\omega_1, \omega_2)(x-t)} d\omega_1 d\omega_2 \right) dx, \quad (7.39a)$$

wobei \hat{f} die zweidimensionale Mellin-Transformation von f ist, die vom unbekanntem zeitabhängigen freien Rand abhängt:

$$\hat{f}(\omega_1, \omega_2, x) = \iint_{\epsilon_x} (-rK + D_1 S_1 + D_2 S_2) S_1^{\omega_1-1} S_2^{\omega_2-1} dS_1 dS_2. \quad (7.39b)$$

Die Position des freien Randes $(S_1^*(t), S_2^*(t))$ wird aus der Integralgleichung (6.15) gewonnen:

$$K - S_1^* - S_2^* = p(S_1^*, S_2^*, t) - \int_t^T \left(\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty} S_1^{*-\omega_1} S_2^{*-\omega_2} \cdot \hat{f}(\omega_1, \omega_2, x) e^{Q(\omega_1, \omega_2)(x-t)} d\omega_1 d\omega_2 \right) dx. \quad (7.39c)$$

Die Gleichung (7.39a) setzt sich aus dem Preis der dazugehörigen europäischen Put-Basket-Option auf zwei Basiswerten mit kontinuierlicher Dividendenzahlung $p(S_1, S_2, t)$ und dem Prämienterm für die vorzeitige Ausübung zusammen.

Da wir den Preis von $p(S_1, S_2, t)$ bereits im Abschnitt 7.2 in den Gleichungen (7.20a) beziehungsweise (7.25a) ermittelt haben, führen wir hier nur die zur numerischen Umsetzung benötigten Vorbetrachtungen hinsichtlich des zweiten Terms von (7.39a) durch.

7.4.1 Vorbetrachtung

Zunächst wollen wir uns mit der Darstellung von \hat{f} (7.39b) beschäftigen, wobei die Integrationsgrenzen gerade die Ausübungsregion ϵ_x der amerikanischen Put-Basket-Option darstellen, die durch den zweidimensionalen unbekanntem zeitabhängigen freien Rand (S_1^*, S_2^*) gegeben ist. Diesen haben wir im Abschnitt 6.2 mit Hilfe der Parametrisierung (6.16) $S_2^* =: g(S_1^*)$ in einen freien Rand der Form $(S_1^*, g(S_1^*))$ überführt, sodass wir \hat{f} nun mit dem Satz von Fubini wie folgt schreiben können:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega_1, \omega_2, x) &= \int_0^{S_1^B(x)} \int_0^{g(S_1)} (-rK + D_1 S_1 + D_2 S_2) S_1^{\omega_1-1} S_2^{\omega_2-1} dS_1 dS_2 \\ &= -\frac{rK}{\omega_2} \int_0^{S_1^B(x)} S_1^{\omega_1-1} g(S_1)^{\omega_2} dS_1 + \frac{D_1}{\omega_2} \int_0^{S_1^B(x)} S_1^{\omega_1} g(S_1)^{\omega_2} dS_1 \\ &\quad + \frac{D_2}{\omega_2 + 1} \int_0^{S_1^B(x)} S_1^{\omega_1-1} g(S_1)^{\omega_2+1} dS_1, \end{aligned}$$

mit der zeitabhängigen Variablen $S_1^B(x)$, die dem eindimensionalen freien Rand bezüglich des Basiswertes S_1 zur Zeit $x := \tau - \xi$ entspricht.

Hierbei müssen wir feststellen, dass \hat{f} nicht so einfach wie im eindimensionalen Fall zu lösen ist und eine Lösung der Integralgleichung (7.39) wie bisher über die *zweidimensionale Gauß-Hermite Quadratur* keine zufriedenstellenden Resultate liefern würde. Zu diesem Ergebnis ist auch Panini in seiner Dissertation [25, Seite 93] gekommen, in der er die Anzahl der Quadraturpunkte sogar auf $N = 198$ erhöhte. Aus diesem Grund werden wir hier die Integralgleichung (7.39) mittels mehrerer Trapezregeln approximativ lösen.

Dafür ist es von Vorteil, eine Transformation bezüglich der Zeitvariablen t mit $\tau := T - t$ vorzunehmen. Außerdem sei $\omega_k := c_k + ix_k$ für $k \in \{1, 2\}$, sodass wir aus den komplexen Integrationsgrenzen reellwertige erhalten. Damit ergibt sich aus (7.39a - 7.39b) insgesamt:

$$P(S_1, S_2, \tau) = p(S_1, S_2, \tau) - \int_0^\tau \left(\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1^{-c_1 - ix_1} S_2^{-c_2 - ix_2} \cdot \hat{f}(x_1, x_2, \tau - \xi) e^{Q(c_1 + ix_1, c_2 + ix_2)\xi} dx_1 dx_2 \right) d\xi, \quad (7.40a)$$

wobei $\xi := \tau - x$ und

$$\begin{aligned} \hat{f}(x_1, x_2, \tau - \xi) = & -\frac{rK}{c_2 + ix_2} \int_0^{S_1^B(\tau - \xi)} S_1^{c_1 - 1 + ix_1} g(S_1)^{c_2 + ix_2} dS_1 \\ & + \frac{D_1}{c_2 + ix_2} \int_0^{S_1^B(\tau - \xi)} S_1^{c_1 + ix_1} g(S_1)^{c_2 + ix_2} dS_1 \\ & + \frac{D_2}{c_2 + 1 + ix_2} \int_0^{S_1^B(\tau - \xi)} S_1^{c_1 - 1 + ix_1} g(S_1)^{c_2 + 1 + ix_2} dS_1. \end{aligned} \quad (7.40b)$$

Die so gefundene Integralgleichung können wir nun mit Hilfe von mehreren Trapezregeln numerisch lösen, wobei darauf zu achten ist, dass die Integrationsgrenzen endlich sind. Da dies bei dem Doppelintegral über $x_1 \times x_2$ nicht der Fall ist, müssen wir hier die Integrationsgrenzen diskretisieren und wählen der Einfachheit halber unsere neuen Integrationsgrenzen jeweils von $-a$ bis $+a$ für ein hinreichend großes $a \in \mathbb{R}^+$.

Bevor jedoch der Preis einer amerikanischen Put-Basket-Option mit Hilfe der Integralgleichung (7.40a) numerisch ermittelt werden kann, müssen wir den zeitabhängigen unbekanntem freien Rand $(S_1^*, g(S_1^*))$ bestimmen, da dieser im Term \hat{f} (7.40b) benötigt wird.

Die Integralgleichung für den freien Rand (7.39c) verändern wir analog und erhalten:

$$\begin{aligned} K - S_1^*(\tau) - g(S_1^*(\tau)) \\ = p(S_1^*, g(S_1^*), \tau) - \int_0^\tau \left(\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} S_1^{*-c_1 - ix_1} g(S_1^*)^{-c_2 - ix_2} \cdot \hat{f}(x_1, x_2, \tau - \xi) e^{Q(c_1 + ix_1, c_2 + ix_2)\xi} dx_1 dx_2 \right) d\xi. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Hieraus ist erkennbar, dass der freie Rand ebenfalls bei seiner Berechnung benötigt wird und deshalb kann die Gleichung (7.46) nur rekursiv mit folgendem Schema gelöst werden, welches für jeden Zeitpunkt τ und jeden Basiswertkurs $0 < S_1^*(\tau) < S_1^B(\tau)$ gilt und mit Anzahl der Iterationsschritte exponentiell konvergiert [25, Seite 91]:

Für $n = 1, 2, \dots$ gilt:

$$g_n(S_1^*(\tau)) = K - S_1^*(\tau) - p(S_1^*(\tau), g_{n-1}(S_1^*(\tau)), \tau) \\ + \int_0^\tau \left(\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-a}^a \int_{-a}^a S_1^*(\tau)^{-c_1 - ix_1} g_{n-1}(S_1^*(\tau))^{-c_2 - ix_2} \right. \\ \left. \cdot \hat{f}_{n-1}(x_1, x_2, \tau - \xi) e^{Q(c_1 + ix_1, c_2 + ix_2)\xi} dx_1 dx_2 \right) d\xi, \\ g_0(S_1^*(\tau)) = S_1^B - S_1^*,$$

solange bis

$$\frac{\|g_n(S_1^*(\tau)) - g_{n-1}(S_1^*(\tau))\|_2}{\|g_{n-1}(S_1^*(\tau))\|_2} \leq \epsilon. \quad (\star)$$

Die Randbedingungen, die an $g(S_1^*(\tau))$ gestellt werden, haben wir in Kapitel 6.2 ermittelt; sie lauten:

$$g(0) = S_2^B, \quad (7.42a)$$

$$g(S_1^B) = 0 \quad (7.42b)$$

und müssen zu jedem Zeitpunkt τ erfüllt sein, wobei S_1^B und S_2^B die eindimensionalen freien Ränder zur Zeit τ für die Basiswerte S_1 und S_2 sind.

Nun können wir die numerische Umsetzung durchführen, in der sowohl das Integral über S_1 als auch das Integral über ξ mit der *einfachen N -Punkte Trapezregel* (D.2) und das Doppelintegral über $x_1 \times x_2$ mit Hilfe der *zweidimensionalen $N_1 \times N_2$ -Punkte Trapezregel* (D.3) approximativ berechnet werden.

7.4.2 Numerische Auswertung

Wir starten mit unseren Betrachtungen hinsichtlich der Berechnung des freien Randes (S_1^*, S_2^*) , da dieser für die Optionspreisbestimmung benötigt wird und wollen seine Eigenschaften als Funktion der Restlaufzeit $\tau := T - t$ graphisch überprüfen. Sie lauten:

- Der freie Rand $(S_1^*(\tau), S_2^*(\tau))$ ist als Funktion der Restlaufzeit τ stetig,
- monoton fallend und
- nimmt zum Zeitpunkt $\tau = 0$ als Summe der Koordinaten $S_1^* + S_2^*$ gerade sein Maximum an, welches im Fall von $D < r$ dem Ausübungspreis K entspricht.

Hierzu betrachten wir die Situation: $K = 100$, $r = 5\%$ pro Jahr, $\sigma_1 = \sigma_2 = 20\%$ pro Jahr, $\rho = 0.5$, $D_1 = D_2 = 0$ und $T = 1$ Jahr. In unserem Programm verwenden wir für sämtliche Trapezregeln zehn Punkte und für den dazugehörigen europäischen Fall die *64-Punkte Gauß-Hermite Quadratur*. Weiter seien $c_1 = c_2 = 3$ und das Stoppkriterium der Rekursion (\star) $\epsilon = 0.01$.

Die daraus resultierende Graphik ist in der Abbildung 7.14 dargestellt und zeigt das gewünschte Verhalten. Insbesondere kann man zum Zeitpunkt $\tau = 0$ die Gerade $S_1^* + g(S_1^*) = K$ erkennen, wobei $g(S_1^*) := S_2^*$.

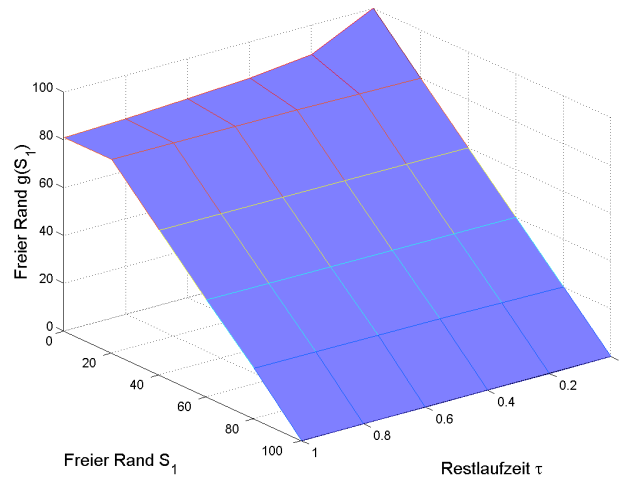


Abbildung 7.14: Der freie Rand $(S_1^*(\tau), S_2^*(\tau))$ in Abhängigkeit von der Restlaufzeit τ

Jetzt wollen wir uns mit dem Optionspreis beschäftigen und werden zunächst sein Verhalten bezüglich der verschiedenen Marktparameter untersuchen, wofür wir Graphiken hinsichtlich der folgenden Situation erzeugen: $S_1 = S_2 = 50$ zum Zeitpunkt $t = 0$, $K = 100$, $r = 5\%$ pro Jahr, $\sigma_1 = \sigma_2 = 20\%$ pro Jahr, $\rho = 0.5$, $D_1 = D_2 = 0$, $T = 1$ Jahr und immer genau einen dieser Faktoren verändern. Des Weiteren verwenden wir für unser Programm die gleichen Parameter wie beim freien Rand in Abbildung 7.14.

Die Abhängigkeit des Preises der Put-Basket-Option von den *Basiswertkursen* S_1 und S_2 zum Zeitpunkt $t = 0$ stellen wir in der Abbildung 7.15 dreidimensional dar, wobei die Achsen gerade den Verlauf der Basiswertkurse S_1 und S_2 sowie den dazugehörigen Optionspreis P widerspiegeln.

Der in Abbildung 7.15 gezeigte Verlauf ist wie im europäischen Fall (Abbildung 7.9) eine monoton fallende Fläche, die für steigende Basiswertkurse zunächst linear fällt, bevor sie sich der Null konvex annähert. Ihr Maximum nimmt sie ebenfalls für die Basiswerte $S_1 = S_2 = 0$ an, wobei dieser in unserem Fall ($D = 0$) gerade dem Ausübungspreis K entspricht und damit über dem der dazugehörigen europäischen Put-Basket-Option liegt, wo es der abgezinste Ausübungspreis $Ke^{-r\tau}$ war. Diese Preisdifferenz ist auf die vorzeitige Ausübungsprämie zurückzuführen, die bei amerikanischen Optionen fällig wird, da sie im Gegensatz zur europäischen vorzeitig ausgeübt werden kann.

Hält man einen der beiden Basiswerte S_1 oder S_2 fest, so ergibt sich eine zweidimensionale Graphik, die wir in ähnlicher Form bei den amerikanischen Put-Optionen erhalten haben (Abbildung 7.3): Sie zeigt eine monoton fallende Funktion der Dimension eins bezüglich einem steigenden Basiswertkurs.

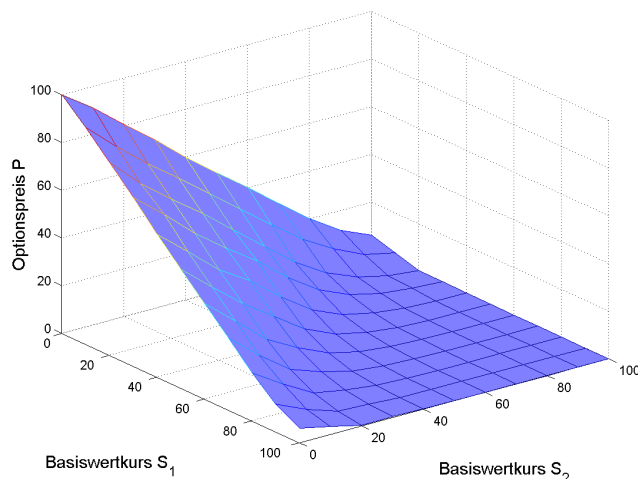


Abbildung 7.15: Der Preis einer amerikanischen Put-Basket-Option P in Abhängigkeit von dem Kurs der Basiswerte S_1 und S_2 zur Zeit $t = 0$

Aus der Erkenntnis, dass der Verlauf des amerikanischen Optionspreises, dem des europäischen Falls entspricht, wobei dieser aufgrund der vorzeitigen Ausübungsprämie zunächst über diesem liegt, können wir davon ausgehen, dass die Graphiken bezüglich der anderen Marktparameter einen analogen Verlauf zu den Graphiken der europäischen Put-Basket-Option zeigen. Aus diesem Grund illustrieren wir hier nur noch die Abhängigkeiten von dem *Ausübungspreis* K und von der *Laufzeit* T in den Abbildungen 7.16 und 7.17.

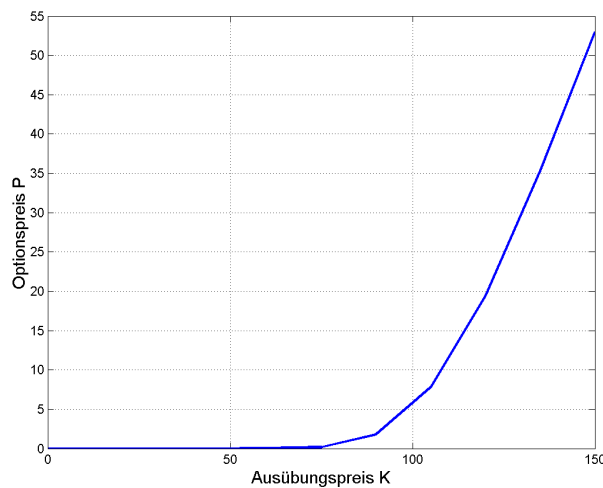


Abbildung 7.16: Der Preis einer amerikanischen Put-Basket-Option P in Abhängigkeit von dem Ausübungspreis K

Die Richtigkeit der Preisverläufe bezüglich den *Basiswertkursen* S_1 und S_2 zum *Zeitpunkt* $t = 0$ und dem *Ausübungspreis* K in den Abbildungen 7.15 und 7.16 können wir wieder aus dem inneren Wert der Option ableiten. Dieser entspricht der Differenz des Ausübungspreises K und der Summe der Basiswertkurse $S_1(\tau) + S_2(\tau)$ und ist im Fall der Ausübung echt positiv:

$$P(S_1, S_2, \tau) = K - S_1(\tau) - S_2(\tau) > 0.$$

Hieraus folgt, dass der Optionspreis ein monoton fallendes Verhalten für eine steigende Summe der Basiswertkurse $S_1(\tau)$ und $S_2(\tau)$ sowie für geringere Ausübungspreise K zeigt.

Die Abhängigkeit von der *Laufzeit* T wollen wir hier gesondert untersuchen, da sie im europäischen Fall eine untergeordnete Rolle spielt und deshalb dort nicht weiter betrachtet wurde.

Aus dem eindimensionalen Fall (Abbildung 7.5) wissen wir, dass mit einer höheren Laufzeit mehr Ausübungsmöglichkeiten entstehen und dies hat eine Wertsteigerung der Option zur Folge. Ein solches Verhalten lässt sich natürlich auf Optionen mit beliebig vielen Basiswerten erweitern und bedeutet, dass der Optionspreis bezüglich der Laufzeit monoton wachsend ist, was durch die Abbildung 7.17 verdeutlicht wird.

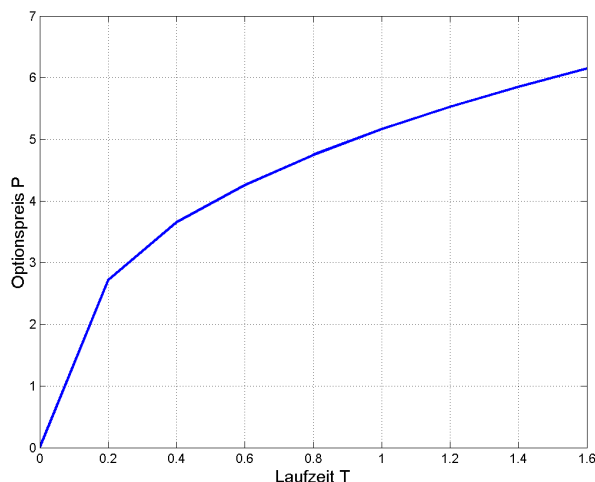


Abbildung 7.17: Der Preis einer amerikanischen Put-Basket-Option P in Abhängigkeit von der Laufzeit T

Bisher haben wir nur den Optionspreisverlauf untersucht und festgestellt, dass er unseren bisherigen Erkenntnissen entspricht und somit korrekt ist. Die Genauigkeit der ermittelten Preise können wir hieraus aber nicht ableiten, sodass wir diese jetzt mit Resultaten anderer Verfahren anhand von Beispielen aus dem Manuskript von Wan [33] vergleichen. Hierfür betrachten wir folgende Situation: $S_1 = S_2 = 50$ zum Zeitpunkt $t = 0$, K variabel, $r = 5\%$ pro Jahr, $D_1 = D_2 = 5\%$ pro Jahr und $T = 1$ Jahr. Die Volatilitäten seien zunächst $\sigma_1 = \sigma_2 = 20\%$ pro Jahr und die Korrelation zwischen den beiden Basiswerten betrage $\rho = 0.5$.

Unser Programm prüfen wir hinsichtlich vier unterschiedlicher Programmaufrufe, die sich in der *T-Punkte Trapezregel* über ξ und der für den europäischen Fall benötigten *G-Punkte Gauß-Hermite Quadratur* unterscheiden. Dabei sei einerseits $T = 10$ und $T = 20$ und andererseits $G = 64$ und $G = 128$. Die beiden anderen Trapezregeln seien für S_1 die *10-Punkte Trapezregel* und für $x_1 \times x_2$ die *10 × 10-Punkte Trapezregel*. Die Konstanten c_1 und c_2 aus der Mellin-Transformation seien wieder $c_1 = c_2 = 3$.

In der nachfolgenden Tabelle 7.10 stellen wir unsere Ergebnisse bezüglich der verschiedenen Programmaufrufe den Resultaten der *Least Squares Monte-Carlo Simulation* und der *zweidimensionalen 100-Stufen Binomialmethode* gegenüber.

K	LSMC Simulation (10^4)	2D- Binomial- baum	Unser Programm			
			G = 64		G = 128	
			T = 10	T = 20	T = 10	T = 20
60	0.0056	0.0057	0.0059	0.0058	0.0059	0.0059
70	0.1022	0.0995	0.0999	0.0996	0.1004	0.1001
80	0.7038	0.6911	0.6931	0.6906	0.6926	0.6911
90	2.6335	2.6217	2.6319	2.6243	2.6251	2.6209
100	6.6656	6.6485	6.6943	6.6757	6.6611	6.6543
110	12.8478	12.8860	13.0062	12.9751	12.9201	12.9143
120	20.8416	20.8890	21.1274	21.0862	20.9554	20.9527
130	30.1320	30.0870	30.4650	30.4187	30.1858	30.2006
140	40.0000	40.0001	40.6341	40.5487	40.3986	40.3332

Tabelle 7.10: Preis einer amerikanischen Put-Basket-Option mit $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.2$ und $\rho = 0.5$

Wir erkennen aus der Tabelle 7.10, dass die Unterschiede zwischen den Ergebnissen der einzelnen Programmaufrufe für größere Ausübungspreise K deutlicher werden. Anhand der dazugehörigen CPU-Laufzeiten: 215.6 Sekunden (4. Spalte), 457.6 Sekunden (5. Spalte), 761.7 Sekunden (6. Spalte) und $1.46 \cdot 10^3$ Sekunden (7. Spalte) können wir feststellen, dass die Genauigkeit der Ergebnisse auf Kosten der Laufzeit geht. Eine Verdopplung der Punkte bei der Trapezregel führt zu einer doppelt so hohen Laufzeit und eine Verdopplung der Anzahl der Quadraturpunkte zu einer Verdreifachung dieser. Deshalb sollten wir uns mit der Genauigkeit bezüglich der *10-Punkte Trapezregel* und der *128-Punkte Gauß-Hermite Quadratur* aus der sechsten Spalte der Tabelle 7.10 zufrieden geben.

Wir können sogar anmerken, dass für Ausübungspreise $K \leq 110$ unsere Resultate näher an der *zweidimensionalen Binomialmethode* liegen als die *Least Squares Monte-Carlo Simulation*. Für höhere K werden die Abweichungen jedoch größer, was eine Folge der bereits existierenden Abweichungen bei den Ergebnissen der Preisberechnung von europäischen Put-Basket-Optionen auf zwei Basiswerten mit kontinuierlicher Dividendenzahlung ist.

Wir haben bereits erwähnt, dass auch Panini sich in seiner Dissertation [25, Seite 89ff] mit amerikanischen Basket-Optionen auf zwei Basiswerte ohne Dividendenzahlung beschäftigt hat. Er verwendete für das Integral über S_1 die 10-Punkte Trapezregel und für das Doppelintegral über $x_1 \times x_2$ die 200×200 -Punkte Trapezregel, aber im Gegensatz zu uns erhielt er nach einer Gesamtlaufzeit von über sechs Stunden auf einem Intel Celeron 2.4 GHz Prozessor mit 256 MB Arbeitsspeicher keine brauchbaren Ergebnisse.

Nun verändern wir die Situation folgendermaßen: die Volatilitäten seien unterschiedlich, $\sigma_1 = 20\%$ pro Jahr und $\sigma_2 = 90\%$ pro Jahr, und die Korrelation wählen wir negativ: $\rho = -0.9$ und fassen unsere Resultate in der Tabelle 7.11 zusammen.

K	LSMC Simulation (10^4)	2D- Binomial- baum	Unser Programm			
			$G = 64$		$G = 128$	
			$T = 10$	$T = 20$	$T = 10$	$T = 20$
60	0.0008	0.0009	0.0004	0.0000	0.0003	0.0000
70	0.2470	0.2362	0.0446	0.0425	0.2062	0.2043
80	2.5348	2.5343	2.2951	2.2896	2.5072	2.5031
90	7.4566	7.4843	7.2026	7.1924	7.4616	7.4544
100	13.8219	13.8777	13.5889	13.5764	13.6547	13.8636
110	21.0542	21.1223	20.8793	20.8674	21.2266	21.2056
120	28.9479	28.9525	28.8626	28.8462	29.2980	29.2512
130	37.1226	37.2112	37.4369	37.4269	37.9396	37.8724
140	45.6813	45.7929	46.6608	46.5738	47.1917	47.0307

Tabelle 7.11: Preis einer amerikanischen Put-Basket-Option mit $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.9$ und $\rho = -0.9$

Hier können wir durch einen Vergleich mit der *Least Squares Monte-Carlo Simulation* und der *zweidimensionalen 100-Stufen Binomialmethode* sehen, dass die Ergebnisse für das 64-Punkte Gauß-Hermite Quadraturschema erst für einen Ausübungspreis von $K \geq 110$ gute Genauigkeiten liefern, wohingegen unser Programm mit $G = 128$ für jedes K gute Werte liefert. Aus diesem Grund können wir auch hier sagen, dass wir uns mit der 10-Punkte Trapezregel und der 128-Punkte Gauß-Hermite Quadratur zufrieden geben.

7.5 Die amerikanische Put-Basket-Option auf n Basiswerte

Der Preis einer amerikanischen Put-Basket-Option auf einer beliebigen Anzahl von Basiswerten mit kontinuierlicher Dividendenzahlung ist durch die Integralgleichung (6.31) gegeben:

$$P(S_1, \dots, S_n, t) = p(S_1, \dots, S_n, t) - \int_t^T \left(\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} \cdots \int_{c_n - i\infty}^{c_n + i\infty} \prod_{m=1}^n S_m^{-\omega_m} \cdot \hat{f}(\omega_1, \dots, \omega_n, x) e^{Q(\omega_1, \dots, \omega_n)(x-t)} d\omega_1 \dots d\omega_n \right) dx, \quad (7.43a)$$

wobei \hat{f} die n-dimensionale Mellin-Transformation von f ist, die vom unbekanntem freien Rand abhängt:

$$\hat{f}(\omega_1, \dots, \omega_n, x) = \int_{\epsilon_x} \cdots \int \left(-rK + \sum_{k=1}^n D_k S_k \right) \prod_{m=1}^n S_m^{\omega_m - 1} dS_1 \dots dS_n. \quad (7.43b)$$

Die Position des freien Randes (S_1^*, \dots, S_n^*) zum Zeitpunkt t wird aus der Integralgleichung (6.33) gewonnen:

$$K - \sum_{k=1}^n S_k^* = p(S_1^*, \dots, S_n^*, t) - \int_t^T \left(\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} \cdots \int_{c_n - i\infty}^{c_n + i\infty} \prod_{m=1}^n S_m^{-\omega_m} \hat{f}(\omega_1, \dots, \omega_n, x) e^{Q(\omega_1, \dots, \omega_n)(x-t)} d\omega_1 \dots d\omega_n \right) dx. \quad (7.43c)$$

Bei der Betrachtung der Gleichung (7.43a) können wir feststellen, dass sich der Preis einer amerikanischen Put-Basket-Option auf beliebig viele Basiswerte mit kontinuierlicher Dividendenzahlung aus dem Preis der dazugehörigen europäischen Put-Basket-Option $p(S_1, \dots, S_n, t)$ und dem Prämienterm für die vorzeitige Ausübung zusammensetzt.

Da wir den Preis von $p(S_1, \dots, S_n, t)$ bereits im Abschnitt 7.3 mit der Gleichung (7.34a) beziehungsweise (7.38a) ermittelt haben, können wir hier unsere Vorbetrachtungen zur numerischen Umsetzung auf den zweiten Term der Gleichung (7.43a) beschränken.

7.5.1 Vorbetrachtung

Wir werden die Integralgleichung (7.43a) wie im zweidimensionalen Fall mittels mehrerer Trapezregeln approximativ lösen.

Dafür ist es vorteilhaft, die Restlaufzeit τ zu betrachten, weshalb wir die Transformation bezüglich der Zeitvariablen t mit $\tau := T - t$ durchführen. Des Weiteren definieren

wir $\omega_k := c_k + ix_k$ für $k \in \{1, \dots, n\}$, sodass wir aus den komplexen Integrationsgrenzen reellwertige erhalten. Die daraus entstehenden Integrationsgrenzen sind, bis auf die über dem Integral $x_1 \times \dots \times x_n$, alle endlich. Da die Trapezregel aber nur auf endliche Integrationsgrenzen angewendet werden kann, müssen wir diese hinsichtlich des Mehrfach-Integrals diskretisieren und wählen der Einfachheit halber wieder unsere neuen Integrationsgrenzen jeweils von $-a$ bis $+a$ für ein hinreichend großes $a \in \mathbb{R}^+$. Insgesamt ergibt sich so aus (7.43a - 7.43b):

$$P(S_1, \dots, S_n, \tau) = p(S_1, \dots, S_n, \tau) - \int_0^\tau \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-a}^{+a} \dots \int_{-a}^{+a} \prod_{m=1}^n S_m^{-c_m - ix_m} \cdot \hat{f}(x_1, \dots, x_n, \tau - \xi) e^{Q(c_1 + ix_1, \dots, c_n + ix_n)\xi} dx_1 \dots dx_n \right) d\xi, \quad (7.44a)$$

wobei $\xi := \tau - x$ und

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_n, \tau - \xi) = \int_{\epsilon_{\tau-\xi}} \dots \int \left(-rK + \sum_{k=1}^n D_k S_k \right) \prod_{m=1}^n S_m^{c_m - 1 + ix_m} dS_1 \dots dS_n. \quad (7.44b)$$

Die Mellin-Transformierte der vorzeitigen Ausübungsprämie \hat{f} (7.43b) hat als Integrationsgrenzen gerade die Ausübungsregion $\epsilon_{\tau-\xi}$ der amerikanischen Put-Basket-Option, die durch den n -dimensionalen unbekanntenen zeitabhängigen freien Rand (S_1^*, \dots, S_n^*) zur Zeit $\tau - \xi$ gegeben ist. Diesen haben wir im Abschnitt 6.4 mit Hilfe der Parametrisierung (6.34) $S_n^* =: g(S_1^*, \dots, S_{n-1}^*)$ in einen freien Rand der Form $(S_1^*, \dots, S_{n-1}^*, g(S_1^*, \dots, S_{n-1}^*))$ überführt. Aus diesem Grund können wir die Ausübungsregion $\epsilon_{\tau-\xi}$ in $\tilde{\epsilon}_{\tau-\xi} \times [0, g(S_1^*, \dots, S_{n-1}^*)]$ zerlegen, wobei $\tilde{\epsilon}_{\tau-\xi} \subset (\mathbb{R}_0^+)^{n-1}$ die Ausübungsregion ist, welche durch den $(n-1)$ -dimensionalen freien Rand $(S_1^*, \dots, S_{n-1}^*)$ gegeben wird.

Aus Arbitragegründen wissen wir, dass der freie Rand für $D_k < r$ zu jedem Zeitpunkt $\tau - \xi$ jeweils im Intervall $0 \leq S_k^*(\tau - \xi) \leq S_k^B(\tau - \xi) \leq K$ für $k \in \{1, \dots, n-1\}$ liegen muss, wobei $S_k^B(\tau - \xi)$ gerade dem eindimensionalen freien Rand bezüglich des Basiswertes S_k zur Zeit $\tau - \xi$ darstellt. Damit können wir die Ausübungsregion $\tilde{\epsilon}_{\tau-\xi}$ etwas genauer angeben:

$$\tilde{\epsilon}_{\tau-\xi} \subseteq [0, S_1^B] \times \dots \times [0, S_{n-1}^B] \subset (\mathbb{R}_0^+)^{n-1}.$$

Mit dem Satz von Fubini können wir \hat{f} nun wie folgt schreiben:

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_n, \tau - \xi) = \int_{\tilde{\epsilon}_{\tau-\xi}} \dots \int \int_0^{g(S_1, \dots, S_{n-1})} \left(-rK + \sum_{k=1}^n D_k S_k \right) \cdot \prod_{m=1}^n S_m^{c_m - 1 + ix_m} dS_1 \dots dS_n$$

und damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(x_1, \dots, x_n, \tau - \xi) = & -\frac{rK}{c_n + ix_n} \int_{\bar{c}_{\tau-\xi}} \cdots \int g(S_1, \dots, S_{n-1})^{c_n+ix_n} \\
& \cdot \prod_{m=1}^{n-1} S_m^{c_m-1+ix_m} dS_1 \dots dS_{n-1} \\
& + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{D_k}{c_n + ix_n} \int_{\bar{c}_{\tau-\xi}} \cdots \int g(S_1, \dots, S_{n-1})^{c_n+ix_n} S_k \\
& \cdot \prod_{m=1}^{n-1} S_m^{c_m-1+ix_m} dS_1 \dots dS_{n-1} \\
& + \frac{D_n}{c_n + 1 + ix_n} \int_{\bar{c}_{\tau-\xi}} \cdots \int g(S_1, \dots, S_{n-1})^{c_n+1+ix_n} \\
& \cdot \prod_{m=1}^{n-1} S_m^{c_m-1+ix_m} dS_1 \dots dS_{n-1}. \quad (7.45)
\end{aligned}$$

Die Integralgleichungen (7.44a) und (7.45) können wir nun mit Hilfe von mehreren Trapezregeln numerisch lösen, wobei zuvor jedoch der unbekannte zeitabhängige freie Rand $(S_1^*, \dots, S_{n-1}^*, g(S_1^*, \dots, S_{n-1}^*))$ bestimmt werden muss, da dieser im Term \hat{f} (7.43b) berücksichtigt wird.

Die Integralgleichung für den freien Rand (7.43c) verändern wir analog und erhalten:

$$\begin{aligned}
K - \sum_{k=1}^{n-1} S_k^*(\tau) - g(S_1^*(\tau), \dots, S_{n-1}^*(\tau)) \\
= p(S_1^*, \dots, S_{n-1}^*, g(S_1^*, \dots, S_{n-1}^*), \tau) \\
- \int_0^\tau \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-a}^{+a} \cdots \int_{-a}^{+a} \prod_{m=1}^{n-1} (S_m^*)^{-c_m-ix_m} g(S_1^*, \dots, S_{n-1}^*)^{-c_n-ix_n} \right. \\
\left. \cdot \hat{f}(x_1, \dots, x_n, \tau - \xi) e^{Q(c_1+ix_1, \dots, c_n+ix_n)\xi} dx_1 \dots dx_n \right) d\xi. \quad (7.46)
\end{aligned}$$

Wir stellen auch hier fest, dass der freie Rand in seiner Berechnung selbst benötigt wird und dass dieser deshalb nur rekursiv bestimmt werden kann, wobei sich das Schema analog zum zweidimensionalen Fall aus Abschnitt 7.4 ergibt.

Jetzt sind wir in der Lage, den Preis numerisch mit Hilfe diverser Trapezregeln approximativ zu berechnen. Da der Aufwand dafür allerdings zu hoch ist, werden wir an dieser Stelle auf die Numerik verzichten.

Kapitel 8

Schlussfolgerung und Ausblick

In dieser Arbeit haben wir uns mit einer alternativen Preisbestimmungsmethode von Basket-Optionen, auf deren Basiswerte kontinuierliche Dividenden gezahlt werden können, beschäftigt.

Wir entwickelten aus der modifizierten n-dimensionalen Black-Scholes-Gleichung mit Hilfe der n-dimensionalen Mellin-Transformation einen Integralausdruck für europäische und amerikanische Basket-Optionen sowie für den freien Rand. Unter Anwendung weiterer Transformationen und der Euler-Formel war es uns möglich, den Integralausdruck bei amerikanischen Basket-Optionen auf einen Basiswert über die Gauß-Laguerre Quadratur und bei den europäischen Basket-Optionen über die Gauß-Hermite Quadratur zu bestimmen. Anders verhielt es sich bei amerikanischen Basket-Optionen auf mindestens zwei Basiswerte. Hier führten wir die Preisbestimmung mit der üblichen Trapezregel durch, da die Gauß-Hermite Quadratur in diesem Fall keine zufriedenstellenden Ergebnisse lieferte.

Die gefundenen Darstellungen haben wir anschließend numerisch umgesetzt und die Resultate mit bekannten Verfahren aus der Literatur verglichen. Dieser Vergleich demonstrierte die hohe Genauigkeit der ermittelten Preise und zeigte die Konkurrenzfähigkeit dieser alternativen Methode. Aus diesem Grund sollte sie auch zukünftig weiter untersucht werden, wo man sie zum Beispiel noch auf komplexere Auszahlungsprofile erweitern könnte, wie sie bei den Barrier-Optionen, Look-Back-Optionen, Butterfly Spread Optionen usw. vorkommen.

Im Fall von europäischen Basket-Optionen auf zwei Basiswerte konnten wir sogar feststellen, dass unsere Methode deutlich schneller als die Monte-Carlo Simulation ist.

Für eine reale Anwendung in der Praxis sollten für Basket-Optionen auf viele Basiswerte jedoch Approximationen für die Integrale gefunden werden, damit die Laufzeit, die mit zunehmender Dimension rasch ansteigt, reduziert werden kann.

Natürlich ist nach wie vor die Bestimmung des freien Randes bei amerikanischen Basket-Optionen das zentrale Problem, um den Aufwand zu minimieren, da dieser rekursiv bestimmt wird. Hier könnte man versuchen, die Ideen von Balakrishna [1] auf höhere Dimensionen zu erweitern.

Eine weitere Möglichkeit zur Verringerung des Rechenaufwandes wäre die Anwendung einer Extrapolationstechnik ähnlich wie die von Huang [15] im eindimensionalen Fall.

Des Weiteren mussten wir feststellen, dass unsere Ergebnisse bei stark voneinander abweichenden Volatilitäten ungenauer wurden. Da wir hierfür keine Ursache finden konnten, wäre auch dies ein Bereich, der weitere Untersuchungen nach sich ziehen könnte.

Anhang A

Notation

In dieser Arbeit werden die europäischen Call- und Put-Optionen mit den kleinen Buchstaben c , p und die amerikanischen mit den großen Buchstaben C , P bezeichnet.

$c = c_t = c(S, t)$	Preis einer europäischen Call-Option
$p = p_t = p(S, t)$	Preis einer europäischen Put-Option
$C = C_t = C(S, t)$	Preis einer amerikanischen Call-Option
$P = P_t = P(S, t)$	Preis einer amerikanischen Put-Option
K	Ausübungspreis (<i>strike price</i>)
$S = S_t = S(t)$	Kurs des Basiswertes S zur Zeit t (<i>stock price</i>)
T	Verfallszeitpunkt (<i>maturity date</i>)
r	risikofreier Zinssatz (<i>risk-free interest rate</i>)
μ	Drift des Basiswertes (<i>drift</i>)
σ	Volatilität des Basiswertes (<i>volatility</i>)

Anhang B

Die Mellin-Transformation

Die **Mellin-Transformation** lässt sich aus der bekannten Laplace-Transformation $\mathcal{L}[g; s] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\tau} g(\tau) d\tau$ mit Hilfe der Euler-Transformation $\tau := -\ln x$ herleiten. Aus diesem Grund kann man sie auch *Euler-Laplace-Transformation* nennen.

B.1 Die Mellin-Transformation in einer Dimension

Die **Mellin-Transformation** einer lokal integrierbaren Funktion $f(x)$ auf $(0, \infty)$ ist wie folgt definiert (Sneddon [31, Seite 273]):

$$\mathcal{M}[f; s] = \hat{f}(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx, \quad (\text{B.1})$$

falls das Integral konvergiert.

Dieses Integral konvergiert absolut, wenn für jedes $\epsilon > 0$ gilt:

$$f(x) = \begin{cases} O(x^{-a-\epsilon}), & \text{für } x \rightarrow 0+ \\ O(x^{-b+\epsilon}), & \text{für } x \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

mit $a < b$.

Das heißt, die Mellin-Transformation (B.1) existiert auf einem vertikalen Streifen in der s -Ebene, dessen Grenzen sich aus dem asymptotischen Verhalten von $f(x)$ für $x \rightarrow 0+$ und $x \rightarrow +\infty$ ergeben.

Sie definiert also eine analytische Funktion auf dem Streifen $\{s \in \mathbb{C} \mid a < \operatorname{Re}(s) < b\}$.

Die Umkehrung der Mellin-Transformation führt man am einfachsten auf die Umkehrung der Laplace-Transformation zurück. Wir erhalten somit mittels der bereits erwähnten Euler-Transformation:

$$f(e^{-\tau}) = g(\tau) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{s\tau} \hat{f}(s) ds,$$

für $a < c < b$, die **inverse Mellin-Transformation**:

$$\mathcal{M}^{-1}[\hat{f}(s); x] = f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} \hat{f}(s) ds, \quad (\text{B.2})$$

für $a < c < b$. Sie ist für alle $x \geq 0$, wo $f(x)$ stetig ist, sinnvoll. Einen Beweis findet man in [31, Seite 273].

1. Elementare Eigenschaften der Mellin-Transformation

$$\mathcal{M}[f(ax); s] = a^{-s} \hat{f}(s) \quad (\text{für } a > 0), \quad (\text{B.3a})$$

$$\mathcal{M}[x^a f(x); s] = \hat{f}(s + a), \quad (\text{B.3b})$$

$$\mathcal{M}[f(x^a); s] = a^{-1} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right) \quad (\text{für } a > 0), \quad (\text{B.3c})$$

$$\mathcal{M}[x^a f(x^b); s] = b^{-1} \hat{f}\left(\frac{s+a}{b}\right) \quad (\text{für } b > 0), \quad (\text{B.3d})$$

$$\mathcal{M}[f'(x); s] = -(s-1) \hat{f}(s-1) \quad (\text{für } a < \operatorname{Re}(s-1) < b), \quad (\text{B.3e})$$

$$\mathcal{M}[f^{(n)}(x); s] = (-1)^n \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-n)} \hat{f}(s-n) \quad (\text{für } a < \operatorname{Re}(s-n) < b). \quad (\text{B.3f})$$

Die dazugehörigen Beweise sind ebenfalls in [31, Seite 262ff] zu finden.

2. Das Faltungstheorem

Eine weitere wichtige Eigenschaft der Mellin-Transformation ist das Faltungstheorem, welches in der Literatur häufig auch als *Parsevalsche Formel* bezeichnet wird. Es dient zur Berechnung der Mellin-Transformierten und inversen Mellin-Transformierten von Produkten.

Seien f, g stückweise stetige Funktionen, deren Mellin-Transformierte \hat{f}, \hat{g} in einem gemeinsamen Konvergenzstreifen existieren. Dann gilt für das Produkt von f und g :

$$\mathcal{M}[f(x)g(x); s] = \int_0^\infty x^{s-1} f(x)g(x) dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(z) \hat{g}(s-z) dz, \quad (\text{B.4a})$$

wobei c in dem gemeinsamen Konvergenzstreifen liegt (1. Faltungssatz). Ähnliches gilt für das Produkt von \hat{f}, \hat{g} :

$$\mathcal{M}^{-1}[\hat{f}(s)\hat{g}(s); x] = \int_0^\infty f\left(\frac{x}{u}\right) g(u) \frac{du}{u}. \quad (\text{B.4b})$$

(2. Faltungssatz).

Einen Beweis dafür findet man in [31, Seite 275ff].

B.2 Die Mellin-Transformation in n Dimensionen

Die **n-dimensionale Mellin-Transformation** von einer Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}[f; \mathbf{s}] &= \hat{f}(\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n) \\ &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty x_1^{s_1-1} \cdots x_n^{s_n-1} f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) d\mathbf{x},\end{aligned}\quad (\text{B.5})$$

falls die Integrale konvergieren. Den zweidimensionalen Fall kann man zum Beispiel in [6, Seite 194] nachlesen.

Die Integrale konvergieren absolut, wenn für jedes $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n > 0$ gilt:

$$f(x, y) = \begin{cases} O(x_1^{-a_1-\epsilon_1} \cdots x_n^{-a_n-\epsilon_n}), & \text{für } (x_1 + \dots + x_n) \rightarrow 0+ \\ O(x_1^{-b_1+\epsilon_1} \cdots x_n^{-b_n+\epsilon_n}), & \text{für } (x_1 + \dots + x_n) \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

mit $a_k < b_k$ ($k = 1, \dots, n$).

Das heißt, die n-dimensionale Mellin-Transformation (B.5) existiert auf dem Bereich $\{\mathbf{s} \in \mathbb{C}^n \mid \mathbf{a} < \text{Re}(\mathbf{s}) < \mathbf{b}\}$, wobei $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Die Umkehrung der n-dimensionalen Mellin-Transformation kann wie im eindimensionalen Fall wieder auf die Umkehrung der n-dimensionalen Laplace-Transformation zurückgeführt werden und wir erhalten als **n-dimensionale inverse Mellin-Transformation**:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{-1}[\hat{f}; \mathbf{x}] &= f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \cdots \int_{c_n-i\infty}^{c_n+i\infty} x_1^{-s_1} \cdots x_n^{-s_n} \hat{f}(\mathbf{s}) d\mathbf{s},\end{aligned}\quad (\text{B.6})$$

für $\mathbf{a} < \mathbf{c} < \mathbf{b}$. Sie ist für alle $\mathbf{x} > 0$, bei denen $f(\mathbf{x})$ stetig ist, sinnvoll.

Die Eigenschaften der n-dimensionalen Mellin-Transformation betrachten wir nicht näher, wir wollen hier nur noch auf das **Faltungstheorem** eingehen, das analog zum eindimensionalen Fall die folgende Gestalt hat:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}[fg; \mathbf{s}] &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty x_1^{s_1-1} \cdots x_n^{s_n-1} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \cdots \int_{c_n-i\infty}^{c_n+i\infty} \hat{f}(\mathbf{z})\hat{g}(\mathbf{s}-\mathbf{z})d\mathbf{z},\end{aligned}\quad (\text{B.7})$$

wobei $\mathbf{a} < \mathbf{c} < \mathbf{b}$ (1. Faltungssatz) und

$$\mathcal{M}^{-1}[\hat{f}\hat{g}; \mathbf{x}] = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty f\left(\frac{\mathbf{x}}{\xi}\right) g(\xi) \frac{d\xi}{\xi} \quad (\text{B.8})$$

(2. Faltungssatz).

Anhang C

Die Gauß-Quadratur

Die Gauß-Quadratur beschäftigt sich mit der numerischen Integration; das Integral wird näherungsweise bestimmt.

Die *Quadraturformel* ist gegeben durch:

$$\int_a^b f(x) \omega(x) dx = \sum_{i=1}^n \gamma_{ni} f(x_{ni}) + R_n f, \quad (\text{C.1})$$

wobei $\omega(x)$ eine Gewichtsfunktion und $R_n f$ den Quadraturfehler darstellt.

Für eine hohe Genauigkeit der Quadraturformel ermittelt man neben den Gewichten $\gamma_{n1}, \dots, \gamma_{nn}$ auch die Stützstellen x_{n1}, \dots, x_{nn} .

Gauß machte den folgenden Ansatz: *Die Quadraturformel:*

$$\int_{-1}^{+1} p(x) dx = \sum_{i=1}^n \gamma_{ni} f(x_{ni}) + R_n f$$

soll alle Polynome $p(x)$ bis zum Höchstgrad $2n - 1$ exakt integrieren, d.h. $R_n f = 0$.

Dies erreichte er, indem er die Stützstellen x_{ni} als Nullstellen des Legendreschen Polynoms:

$$L_n(t) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n(t^2 - 1)^n}{dt^n}$$

ermittelte und die Gewichte γ_{ni} über die folgende Formel:

$$\gamma_{ni} = \int_{-1}^{+1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k} dx, \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

bestimmte. Die ermittelten Gewichte γ_{ni} sind positiv für $1 \leq i \leq n$ und führen damit auf eine Positivität der Gaußschen Quadraturformel [14, Seite 316].

Die Normierung des Intervalls $[a; b] := [-1; +1]$ stellt keine Einschränkung dar, da sich jedes endliche Intervall $[a; b]$ durch die Transformation $t = 2\frac{x-a}{b-a} - 1$ in $[-1; +1]$ überführen läßt.

Die Idee von Gauß wurde als Grundlage für die zahlreichen Quadraturformeln verwendet, die sich durch die Gewichtsfunktion und das dazugehörige Integrationsintervall unterscheiden.

Wir wollen hier aber nur auf zwei Quadraturformeln näher eingehen, die sich auf uneigentliche Integrale beziehen. Sie lauten *Gauß-Laguerre-Quadratur* und *Gauß-Hermite-Quadratur*.

C.1 Gauß-Laguerre-Quadratur

Diese Quadraturformel betrachtet Integrale mit der Gewichtsfunktion $\omega(x) = e^{-x}$ auf $[0; \infty)$ und hat folgende Gestalt:

$$\int_0^{\infty} f(x)e^{-x}dx = \sum_{k=1}^n \gamma_{nk}f(x_{nk}) + R_n f, \quad (\text{C.2})$$

wobei die **Stützstellen** x_{nk} gerade den Nullstellen des *Laguerre-Polynoms*

$$\Lambda_n(x) = \frac{1}{n!}(-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \quad (\text{C.3})$$

entsprechen und die **Gewichte** γ_{nk} sich ergeben aus

$$\gamma_{nl} = \int_0^{\infty} \left(\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \frac{x - x_l}{x_k - x_l} \right) e^{-x} dx, \quad \text{für } l = 1, \dots, n. \quad (\text{C.4})$$

Der **Quadraturfehler** $R_n f$ lautet für $f \in C^{2n}[0; \infty)$:

$$R_n f = \frac{n!}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad (\text{C.5})$$

wobei $\xi \in (0; \infty)$. Die Angabe des Fehlers entnimmt man der Literatur, z.B. [9, Seite 223]).

Die Startwerte für das nichtlineare Nullstellenproblem liefert die nachfolgende Bemerkung, wobei wir hier mit der kleinsten Nullstelle starten.

Bemerkung 15 *Bei der Programmierung verwendet man folgende Rekursionsfolgen: Für die Stützstellen gilt folgende Approximation:*

$$\begin{aligned} x_1 &\simeq \frac{3}{1 + 2.4n}, \\ x_2 &\simeq x_1 + \frac{15}{1 + 2.5n}, \\ x_k &\simeq x_{k-1} + \frac{1 + 2.55(k-2)}{1.9(k-2)} \cdot (x_{k-1} - x_{k-2}), \quad \text{für } k = 3, \dots, n \end{aligned}$$

und für das Laguerre-Polynom gilt die Rekursion:

$$\begin{aligned}\Lambda_0(x) &= 0, \\ \Lambda_1(x) &= 1, \\ k\Lambda_k(x) &= (2k-1-x_k)\Lambda_{k-1} - (k-1)\Lambda_{k-2}, \quad \text{für } k = 3, \dots, n.\end{aligned}$$

C.2 Gauß-Hermite-Quadratur

Diese Quadraturformel betrachtet Integrale mit der Gewichtsfunktion $\omega(x) = e^{-x^2}$ auf $(-\infty; +\infty)$ und hat folgende Gestalt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) dx = \sum_{k=1}^n \gamma_{nk} f(x_{nk}) + R_n f, \quad (\text{C.6})$$

wobei die **Stützstellen** x_{ni} gerade den Nullstellen des *Hermite-Polynoms*

$$H_n(x) = \left(\frac{2^n}{n! \sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad (\text{C.7})$$

entsprechen und die **Gewichte** γ_{ni} sich ergeben aus

$$\gamma_{ni} = \int_0^{\infty} \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right) e^{-x^2} dx, \quad \text{für } i = 1, \dots, n. \quad (\text{C.8})$$

Der **Quadraturfehler** $R_n f$ lautet für $f \in C^{2n}[-\infty; +\infty)$:

$$R_n f = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^n (2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad (\text{C.9})$$

wobei $\xi \in (-\infty; +\infty)$. Die Angabe des Fehlers entnimmt man der Literatur, z.B. [9, Seite 224]).

Da die *Gauß-Hermite-Quadratur* eine symmetrische Formel darstellt, braucht man nur die Hälfte der Stützstellen und der Gewichte zu ermitteln, denn es gilt:

$$\begin{aligned}\text{für die Stützstellen: } & x_i = -x_{n-i+1} \\ & \text{und} \\ \text{für die Gewichte: } & \gamma_i = \gamma_{n-i+1}.\end{aligned}$$

Die Startwerte für das nichtlineare Nullstellenproblem liefert die nachfolgende Bemerkung, wobei wir hier mit der größten Nullstelle starten.

Bemerkung 16 Bei der Programmierung verwendet man folgende Rekursionsfolgen:
Für die Stützstellen gilt folgende Approximation:

$$\begin{aligned}x_1 &\simeq \sqrt{2n+1} - 1.85575(2n+1)^{-\frac{1}{6}}, \\x_2 &\simeq x_1 - \frac{1.14n^{0.426}}{x_1}, \\x_3 &\simeq 1.86x_2 - 0.86x_1, \\x_4 &\simeq 1.91x_3 - 0.91x_2, \\x_k &\simeq 2x_{k-1} - x_{k-2}, \quad \text{für } k = 5, \dots, n\end{aligned}$$

und für das Hermite-Polynom gilt die Rekursion:

$$\begin{aligned}H_0(x) &= 0, \\H_1(x) &= \frac{1}{\pi^{0.25}}, \\H_k(x) &= x_k \cdot \sqrt{\frac{2}{k}} H_{k-1} - \sqrt{\frac{k-1}{k}} H_{k-2}, \quad \text{für } k = 3, \dots, n.\end{aligned}$$

Anhang D

Die Interpolationsquadratur

Die Interpolationsquadratur beschäftigt sich mit einer näherungsweise Berechnung des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)dx$. Hierbei wird der Integrand f , welcher Riemannintegrierbar sein muss, durch eine Näherung \tilde{f} ersetzt, die einfach zu integrieren ist.

In diesem Abschnitt wollen wir nun zwei verschiedene Interpolationsvarianten vorstellen, die zum Beispiel in [14] definiert sind. Es sind die Rechteckregel und die Trapezregel, wobei wir die zweite auch bezüglich der Dimension zwei erläutern werden.

Dazu teilen wir das Intervall $[a, b]$ in N Teilintervalle der Form auf $[x_s, x_{s+1}]$, $0 \leq s \leq N - 1$, auf, mit $x_0 = a$ und $x_N = b$.

D.1 Die Rechteckregel

Die Rechteckregel interpoliert in jedem Teilintervall $[x_s, x_{s+1}]$, $0 \leq s \leq N - 1$, die Funktion f durch eine Konstante $f(x_s^*)$ mit $x_s^* \in [x_s, x_{s+1}]$. Da diese Interpolation geometrisch die Form eines Rechtecks zeigt, hat diese Interpolationsmethode den Namen *Rechteckregel* erhalten.

Integriert man nun für jedes Teilintervall diese Interpolation, so ergibt sich als Näherung des Integrals $\int_a^b f(x)dx$ die folgende Summe:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{s=0}^{N-1} f(x_s^*)(x_{s+1} - x_s),$$

wobei man hier bei der Wahl von x_s^* folgende Unterschiede machen kann:

- (a) $x_s^* := x_s$,
- (b) $x_s^* := x_{s+1}$,
- (c) $x_s^* := \frac{x_{s+1} + x_s}{2}$ (Mittelpunktregel).

Bei äquidistanter Intervallteilung, das heißt, alle Teilintervalle haben die gleiche Länge h mit $h := \frac{b-a}{N}$, lautet die Näherung:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h \sum_{s=0}^{N-1} f(x_s^*). \tag{D.1}$$

Schließlich wollen wir noch die Fehlerschranken explizit angeben [14, Seite 291]:

Fehlerschranke zu (a) und (b): Unter der Annahme, dass $f \in C^1[a, b]$, gilt:

$$|R_N f| \leq \frac{h}{2} \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|(b-a).$$

Fehlerschranke zu (c): Unter der Annahme, dass $f \in C^2[a, b]$, gilt:

$$|R_N f| \leq \frac{h^2}{24} \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|(b-a).$$

D.2 Die Trapezregel

Die N -Punkte Trapezregel interpoliert in jedem Teilintervall $[x_s, x_{s+1}]$, $0 \leq s \leq N-1$, die Funktion f durch eine lineare Funktion.

Integriert man nun für jedes Teilintervall diese Interpolation, so ergibt sich als Näherung des Integrals $\int_a^b f(x)dx$ die folgende Summe:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{s=0}^{N-1} \frac{f(x_s) + f(x_{s+1})}{2} (x_{s+1} - x_s),$$

wobei mit äquidistanter Intervallteilung $h := \frac{b-a}{N}$ die Näherung lautet:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h \left[\frac{1}{2}f(x_0) + \sum_{s=1}^{N-1} f(x_s) + \frac{1}{2}f(x_N) \right]. \quad (\text{D.2})$$

Die Fehlerschranke ergibt sich unter der Annahme, dass $f \in C^2[a, b]$ [14, Seite 295]:

$$|R_N f| \leq \frac{h^2}{12} \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|(b-a).$$

Bei einem *Mehrfach-Integral* kann man mit Hilfe des Kartesischen Produktes ein Interpolationspolynom entwickeln. Hier wollen wir nun das Doppel-Integral $\int_a^b \int_c^d f(x, y)dx dy$ mit Hilfe der *zweidimensionalen* $N \times M$ -Punkte Trapezregel interpolieren, wobei wir das Integrationsgebiet $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ wieder äquidistant mit $h_x := \frac{b-a}{N}$ und $h_y := \frac{d-c}{M}$ aufteilen. Insgesamt erhalten wir somit:

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d f(x, y)dx dy &\simeq Q_y[Q_x f] \\ &= h_x h_y \left[\frac{1}{4} (f(x_0, y_0) + f(x_N, y_0) + f(x_0, y_M) + f(x_N, y_M)) \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\sum_{t=1}^{M-1} f(x_0, y_t) + \sum_{s=1}^{N-1} f(x_s, y_0) + \sum_{s=1}^{N-1} f(x_s, y_M) \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{t=1}^{M-1} f(x_N, y_t) \right) + \sum_{s=1}^{N-1} \sum_{t=1}^{M-1} f(x_s, y_t) \right]. \quad (\text{D.3}) \end{aligned}$$

Für die Fehlerschranke gilt unter der Annahme, dass $f \in C^2([a, b] \times [c, d])$ [14, Seite 343]:

$$|R_{N \times M} f| \leq \frac{(b-a)(d-c)}{12} [h_x^2 \max_{(x,y) \in G} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right| + h_y^2 \max_{(x,y) \in G} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|].$$

Anhang E

Beweise

In diesem Kapitel wollen wir die Darstellungsvarianten, die wir in Kapitel 6 für die Mellin-Transformierte des Auszahlungsterms

$$\hat{\theta}(\omega_1, \dots, \omega_n) = \int_0^K \cdots \int_0^{K - \sum_{k=1}^{n-1} S_k} (K - S_1 - S_2) S_1^{\omega_1-1} \cdots S_n^{\omega_n-1} dS_1 \cdots dS_n$$

verwendet haben, beweisen. Es gab einerseits die Möglichkeit $\hat{\theta}$ über die *N-Punkte Trapezregel* zu beschreiben und andererseits konnten wir mittels der Beta-Funktion $\hat{\theta}$ über die *Gammafunktion* darstellen.

Wir haben in diesem Zusammenhang bereits eine kurze Beschreibung geliefert, wie man diese Ausdrücke erhält. Hier wollen wir nun die eigentlichen Beweise für den n-dimensionalen Fall mittels der vollständigen Induktion über n vornehmen.

Darstellung 1 *Wir können $\hat{\theta}$ mit Hilfe der N-Punkte-Trapezregel wie folgt*

$$\hat{\theta}(\omega_1, \dots, \omega_n) = \left(\frac{1}{\omega_n} - \frac{1}{\omega_n + 1} \right) \left(\frac{K}{N} \right)^{1 + \sum_{k=1}^n \omega_k} \prod_{l=1}^{n-2} \left(\frac{1}{N} \right)^{1 + \omega_n + \sum_{m=1}^l \omega_{n-m}} \\ \cdot \prod_{l=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{N-1} (N - k)^{1 + \sum_{m=1}^l \omega_{n+1-m}} k^{\omega_{n-l}-1} \right)$$

darstellen.

Beweis per vollständigen Induktion über n :*Induktionsanfang für $n = 2$:*

$$\begin{aligned}
& \hat{\theta}(\omega_1, \dots, \omega_n) \\
&= \int_0^K \int_0^{K-S_1} (K - S_1 - S_2) S_1^{\omega_1-1} S_2^{\omega_2-1} dS_1 dS_2 \\
&= \int_0^K \left(\int_0^{K-S_1} (K - S_1) S_2^{\omega_2-1} - S_2^{\omega_2} dS_2 \right) S_1^{\omega_1-1} dS_1 \\
&= \left(\frac{1}{\omega_2} - \frac{1}{\omega_2 + 1} \right) \int_0^K (K - S_1)^{\omega_2+1} S_1^{\omega_1-1} dS_1 \\
&\cong \left(\frac{1}{\omega_2} - \frac{1}{\omega_2 + 1} \right) \frac{K}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \left(K - k \frac{K}{N} \right)^{\omega_2+1} \left(k \frac{K}{N} \right)^{\omega_1-1} \\
&= \left(\frac{1}{\omega_2} - \frac{1}{\omega_2 + 1} \right) \left(\frac{K}{N} \right)^{\omega_1+\omega_2+1} \sum_{k=1}^{N-1} (N-k)^{\omega_2+1} k^{\omega_1-1}
\end{aligned}$$

*Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$.**Induktionsvoraussetzung:*

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}(\omega_1, \dots, \omega_n) &= \left(\frac{1}{\omega_n} - \frac{1}{\omega_n + 1} \right) \left(\frac{K}{N} \right)^{1+\sum_{k=1}^n \omega_k} \\
&\quad \cdot \prod_{l=1}^{n-2} \left(\frac{1}{N} \right)^{1+\omega_n+\sum_{m=1}^l \omega_{n-m}} \prod_{l=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{N-1} (N-k)^{1+\sum_{m=1}^l \omega_{n+1-m}} k^{\omega_{n-l}-1} \right).
\end{aligned}$$

Induktionsbehauptung:

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}(\omega_1, \dots, \omega_{n+1}) &= \left(\frac{1}{\omega_{n+1}} - \frac{1}{\omega_{n+1} + 1} \right) \left(\frac{K}{N} \right)^{1+\sum_{k=1}^{n+1} \omega_k} \\
&\quad \cdot \prod_{l=1}^{n-1} \left(\frac{1}{N} \right)^{1+\omega_{n+1}+\sum_{m=1}^l \omega_{n+1-m}} \cdot \prod_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^{N-1} (N-k)^{1+\sum_{m=1}^l \omega_{n+2-m}} k^{\omega_{n+1-l}-1} \right).
\end{aligned}$$

Der Beweis benötigt folgende Substitutionen $\bar{K} := K - S_1$, $\bar{S}_l := S_{l+1}$ und $\bar{\omega}_l := \omega_{l+1}$.

$$\begin{aligned}
& \hat{\theta}(\omega_1, \dots, \omega_{n+1}) \\
&= \int_0^K \int_0^{K-S_1} \dots \int_0^{K-\sum_{k=1}^n S_k} (K - \sum_{k=1}^{n+1} S_k) \prod_{k=1}^{n+1} S_k^{\omega_k-1} dS_1 \dots dS_{n+1} \\
\stackrel{\text{Subst.}}{=} & \int_0^K \left(\int_0^{\bar{K}} \dots \int_0^{\bar{K}-\sum_{k=1}^{n-1} \bar{S}_k} (\bar{K} - \sum_{k=1}^n \bar{S}_k) \prod_{k=1}^n \bar{S}_k^{\omega_k-1} d\bar{S}_1 \dots d\bar{S}_n \right) S_k^{\omega_1-1} dS_1 \\
\stackrel{IV}{=} & \int_0^K \left(\frac{1}{\bar{\omega}_n} - \frac{1}{\bar{\omega}_n+1} \right) \left(\frac{\bar{K}}{N} \right)^{1+\sum_{k=1}^n \bar{\omega}_k} \prod_{l=1}^{n-2} \left(\frac{1}{N} \right)^{1+\bar{\omega}_n+\sum_{m=1}^l \bar{\omega}_{n-m}} \\
& \quad \cdot \prod_{l=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{N-1} (N-k)^{1+\sum_{m=1}^l \bar{\omega}_{n+1-m}} k^{\bar{\omega}_{n-l-1}} \right) \cdot S_1^{\omega_1-1} dS_1 \\
\stackrel{\text{Subst.}}{=} & \left(\frac{1}{\omega_{n+1}} - \frac{1}{\omega_{n+1}+1} \right) \prod_{l=1}^{n-2} \left(\frac{1}{N} \right)^{1+\omega_{n+1}+\sum_{m=1}^l \omega_{n+1-m}} \\
& \quad \cdot \prod_{l=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{N-1} (N-k)^{1+\sum_{m=1}^l \omega_{n+2-m}} k^{\omega_{n+1-l-1}} \right) \left(\frac{1}{N} \right)^{1+\sum_{k=1}^n \omega_{k+1}} \\
& \quad \cdot \int_0^K (K-S_1)^{1+\sum_{k=1}^n \omega_{k+1}} S_1^{\omega_1-1} dS_1 \\
\stackrel{\cong}{=} & \dots \cdot \frac{K}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \left(K - k \frac{K}{N} \right)^{1+\sum_{k=1}^n \omega_{k+1}} \left(k \frac{K}{N} \right)^{\omega_1-1} \\
&= \left(\frac{1}{\omega_{n+1}} - \frac{1}{\omega_{n+1}+1} \right) \left(\frac{K}{N} \right)^{1+\sum_{k=1}^{n+1} \omega_k} \\
& \quad \cdot \prod_{l=1}^{n-2} \left(\frac{1}{N} \right)^{1+\omega_{n+1}+\sum_{m=1}^l \omega_{n+1-m}} \cdot \left(\frac{1}{N} \right)^{1+\omega_{n+1}+\sum_{m=1}^{n-1} \omega_{n+1-m}} \\
& \quad \cdot \prod_{l=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{N-1} (N-k)^{1+\sum_{m=1}^l \omega_{n+2-m}} k^{\omega_{n+1-l-1}} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{N-1} (N-k)^{1+\sum_{m=1}^n \omega_{n+2-m}} k^{\omega_{n+1-n-1}} \right) \\
&= \left(\frac{1}{\omega_{n+1}} - \frac{1}{\omega_{n+1}+1} \right) \left(\frac{K}{N} \right)^{1+\sum_{k=1}^{n+1} \omega_k} \prod_{l=1}^{n-1} \left(\frac{1}{N} \right)^{1+\omega_{n+1}+\sum_{m=1}^l \omega_{n+1-m}} \\
& \quad \cdot \prod_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^{N-1} (N-k)^{1+\sum_{m=1}^l \omega_{n+2-m}} k^{\omega_{n+1-l-1}} \right).
\end{aligned}$$

□

Darstellung 2 Wir können $\hat{\theta}$ mit Hilfe der Gammafunktion wie folgt

$$\hat{\theta}(\omega_1, \dots, \omega_n) = K^{\omega_1+\omega_2+1} \frac{\Gamma(\omega_1)\Gamma(\omega_2)}{\Gamma(\omega_1+\omega_2+2)}$$

darstellen.

Beweis per vollständigen Induktion über n :

Induktionsanfang für $n = 2$:

$$\begin{aligned}
& \hat{\theta}(\omega_1, \dots, \omega_n) \\
&= \int_0^K \int_0^{K-S_1} (K - S_1 - S_2) S_1^{\omega_1-1} S_2^{\omega_2-1} dS_1 dS_2 \\
&= \frac{K}{\omega_2} \int_0^K (K - S_1)^{\omega_2} S_1^{\omega_1-1} dS_1 \\
&\quad - \frac{1}{\omega_2} \int_0^K (K - S_1)^{\omega_2} S_1^{\omega_1} dS_1 - \frac{1}{\omega_2 + 1} \int_0^K (K - S_1)^{\omega_2+1} S_1^{\omega_1-1} dS_1 \\
&\stackrel{S_1 := Kt}{=} K^{\omega_1+\omega_2+1} \left(\frac{1}{\omega_2} \int_0^1 (1-t)^{(\omega_2+1)-1} t^{\omega_1-1} dt \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\omega_2} \int_0^1 (1-t)^{(\omega_2+1)-1} t^{(\omega_1+1)-1} dt - \frac{1}{\omega_2+1} \int_0^1 (1-t)^{(\omega_2+2)-1} t^{\omega_1-1} dt \right) \\
&\stackrel{Beta=Fkt.}{=} K^{\omega_1+\omega_2+1} \left(\frac{1}{\omega_2} \frac{\Gamma(\omega_1)\Gamma(\omega_2+1)}{\Gamma(\omega_1+\omega_2+1)} - \frac{1}{\omega_2} \frac{\Gamma(\omega_1+1)\Gamma(\omega_2+1)}{\Gamma(\omega_1+\omega_2+2)} - \frac{1}{\omega_2+1} \frac{\Gamma(\omega_1)\Gamma(\omega_2+1)}{\Gamma(\omega_1+\omega_2+2)} \right) \\
&\stackrel{Funktionalgl.}{=} K^{\omega_1+\omega_2+1} \left(\frac{\Gamma(\omega_1)\Gamma(\omega_2)}{\Gamma(\omega_1+\omega_2+1)} - \frac{\Gamma(\omega_1+1)\Gamma(\omega_2)}{\Gamma(\omega_1+1+\omega_2+2)} - \frac{\Gamma(\omega_1)\Gamma(\omega_2+1)}{\Gamma(\omega_1+\omega_2+2)} \right) \\
&\stackrel{Funktionalgl.}{=} K^{\omega_1+\omega_2+1} \frac{\Gamma(\omega_1)\Gamma(\omega_2)}{\Gamma(\omega_1+\omega_2+2)}.
\end{aligned}$$

Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$.

Induktionsvoraussetzung:

$$\hat{\theta}(\omega_1, \dots, \omega_n) = K^{\sum_{k=1}^n \omega_k + 1} \frac{\prod_{k=1}^n \Gamma(\omega_k)}{\Gamma(\sum_{k=1}^n \omega_k + 2)}.$$

Induktionsbehauptung:

$$\hat{\theta}(\omega_1, \dots, \omega_{n+1}) = K^{\sum_{k=1}^{n+1} \omega_k + 1} \frac{\prod_{k=1}^{n+1} \Gamma(\omega_k)}{\Gamma(\sum_{k=1}^{n+1} \omega_k + 2)}.$$

$$\begin{aligned}
& \hat{\theta}(\omega_1, \dots, \omega_{n+1}) \\
&= \int_0^K \int_0^{K-S_1} \dots \int_0^{K-\sum_{k=1}^n S_k} S_k \left(K - \sum_{k=1}^{n+1} S_k \right) \prod_{k=1}^{n+1} S_k^{\omega_k-1} dS_1 \dots dS_{n+1} \\
&\stackrel{\bar{K} := K - S_1}{=} \int_0^K S_1^{\omega_1-1} \left(\int_0^{\bar{K}} \dots \int_0^{\bar{K}-\sum_{k=2}^n S_k} S_k \left(\bar{K} - \sum_{k=2}^{n+1} S_k \right) \prod_{k=2}^{n+1} S_k^{\omega_k-1} dS_2 \dots dS_{n+1} \right) dS_1 \\
&\stackrel{IV}{=} \int_0^K S_1^{\omega_1-1} \bar{K}^{\sum_{k=2}^{n+1} \omega_k + 1} \frac{\prod_{k=2}^{n+1} \Gamma(\omega_k)}{\Gamma(\sum_{k=2}^{n+1} \omega_k + 2)} dS_1 \\
&\stackrel{\bar{K} := K - S_1}{=} \frac{\prod_{k=2}^{n+1} \Gamma(\omega_k)}{\Gamma(\sum_{k=2}^{n+1} \omega_k + 2)} \int_0^K S_1^{\omega_1-1} (K - S_1)^{\sum_{k=2}^{n+1} \omega_k + 1} dS_1 \\
&\stackrel{S_1 := tK}{=} \frac{\prod_{k=2}^{n+1} \Gamma(\omega_k)}{\Gamma(\sum_{k=2}^{n+1} \omega_k + 2)} \int_0^1 K^{\omega_1-1} t^{\omega_1-1} K^{\sum_{k=2}^{n+1} \omega_k + 1} (1-t)^{\sum_{k=2}^{n+1} \omega_k + 1} K dt \\
&= \frac{\prod_{k=2}^{n+1} \Gamma(\omega_k)}{\Gamma(\sum_{k=2}^{n+1} \omega_k + 2)} K^{\sum_{k=1}^{n+1} \omega_k + 1} \frac{\Gamma(\omega_1)\Gamma(\sum_{k=2}^{n+1} \omega_k + 2)}{\Gamma(\sum_{k=1}^{n+1} \omega_k + 2)} \\
&= K^{\sum_{k=1}^{n+1} \omega_k + 1} \frac{\prod_{k=1}^{n+1} \Gamma(\omega_k)}{\Gamma(\sum_{k=1}^{n+1} \omega_k + 2)}.
\end{aligned}$$

□

Literaturverzeichnis

- [1] Balakrishna, B. S.: *Analytic Representations and Approximations to American Option Pricing*, Economics Working Paper Archive, 1996, Paper 9602002
- [2] Barraquand, J., und Martineau, D.: *Numerical Valuation of High Dimensional Multivariate American Securities*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1995, Vol. 30, Nr. 3, Seiten 383-405
- [3] Brennan, M., und Schwartz, E.: *The valuation of American put options*, Journal of Finance, 1977, Vol. 32, Seiten 449-462
- [4] Broadie, M., und Detemple, J.: *American Option valuation: New bounds, approximations and a comparison of existing methods*, Review of Financial Studies, 1996, Vol. 9, Nr. 4, Seiten 1211 - 1250
- [5] Broadie, M., und Detemple, J.: *The valuation of American Options on multiple Assets*, Mathematical Finance, 1997, Vol. 7, Seiten 241-286
- [6] Brychkov, Y. A.: *Multidimensional Integral Transforms*, Gordon and Breach, 1992
- [7] Corwin, J., Boyle, P. P., und Tan, K. S.: *Quasi-Monte Carlo Methods in Numerical Finance*, Management Science, 1996, Vol. 42, Seiten 926-938
- [8] Cryer, C. W.: *The solution of a quadratic programming problem using overrelaxation*, SIAM J. Control, 1971, Vol. 9, Seiten 385-392
- [9] Davis, P. J., und Rabinowitz, P.: *Methods of Numerical Integration*, 2. Auflage, Academic Press, 1984
- [10] Erdélyi, A.: *Tables of Integral Transforms*, Vol. 1 u. 2, McGraw-Hill Book Company, 1954
- [11] Fasshauer, G. E., Khaliq, A. Q., und Voss, D. A.: *Using Meshfree Approximation for Multi-Asset American Option Problems*, J. Chinese Institute Engineers, 2004, Vol. 27, Nr. 4, Seiten 563-571
- [12] Franke, Jürgen, Härdle, Wolfgang, und Hafner, Christian: *Einführung in die Statistik der Finanzmärkte*, 1. Auflage, Springer-Verlag, 2001
- [13] Günther, M., und Jüngel, A.: *Finanzderivate mit Matlab*, 1. Auflage, Vieweg-Verlag, 2003

-
- [14] Hämmerlin, G., und Hoffmann, K-H.: *Numerische Mathematik*, Springer-Verlag, 1989
- [15] Huang, J-Z., Subrahmanyam, M. G., und Yu, G. G.: *Pricing and Hedging American Options: A Recursive Integration Method*, Review of Financial Studies, 1996, Vol. 9, Nr. 1, Seiten 277 - 300
- [16] Hull, J. C.: *Options, Futures, and Other Derivatives*, 5. Auflage, Prentice Hall, 2003
- [17] Jódar, J., Sevilla-Peris, P., Cortés, J. C., und Sala, R.: *A new direct method for solving the Black-Scholes equation*, Applied Mathematics Letters, 2005, Vol. 18, Seiten 29 - 32
- [18] Jüngel, Prof. Dr. A.: *Mathematische Modellierung von Finanzderivaten*, Universität Konstanz, Vorlesungsskript WS 2001/2002
- [19] Kim, I. J.: *The analytic valuation of American Options*, Review of Financial Studies, 1990, Vol. 3, Nr. 4, Seiten 547 - 572
- [20] Kwok, Y-K.: *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Springer Finance, 1998
- [21] McOwen, R. C.: *Partial Differential Equations: Methods and Applications*, Prentice Hall, 1996
- [22] Milevsky, M. A., und Posner, S. E.: *A closed-form approximation for valuing basket options*, The Journal of Derivatives, 1998, Vol. 5, Nr. 4, Seiten 54 - 61
- [23] Nielsen, B. F., Skavhaug, O., und Tveito, A.: *Penalty methods for the numerical solution of American multi-asset option problems*, The Department of Informatics, University of Oslo, 2000
- [24] Panini, R. und Srivastav, R. P.: *Option pricing with Mellin Transforms*, Mathematical and Computer Modelling, 2004, Vol. 40, Seiten 43 - 56
- [25] Panini, R.: *Option pricing with Mellin Transforms*, Dissertation, Stone Brook University, 2004
- [26] Pauly, Oliver: *Numerical Simulation of American Options*, Universität Ulm, Diplomarbeit, 2004
- [27] Pellizzari, P.: *Efficient Monte Carlo pricing of basket options*, Economics Working Paper Archive, 1998, Paper 9801001
- [28] Press, W., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., und Vetterling, W. T.: *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific computing*, 2. Auflage, Cambridge University Press, 1992
- [29] Rank, Dr. J.: *Stochastische Prozesse in der Finanzmathematik*, dfine GmbH, Vorlesungsskript WS 2000/2001

-
- [30] Schied, A.: *Finanzmathematik II*, Technische Universität Berlin, Vorlesungsskript SS 2005
- [31] Sneddon, I. H.: *The Use of Integral Transforms*, McGraw-Hill Book Company, 1972
- [32] Stroud, A. H., und Secrest, Don: *Gaussian Quadrature Formulas*, Prentice Hall, 1966
- [33] Wan, H.: *Pricing American-style Basket Options by Implied Binomial Tree*, Manuscript, University of California at Berkeley, 2000
- [34] Wilmott, P., Dewynne, J., und Howison, S.: *Option Pricing*, Oxford Financial Press, 1994

